ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

Se H_1 designa la profondità del canale nella sezione a valle, avendosi ivi per ipotesi $V = c_1$ della precedente si ricava:

$$H_1 - H - \Delta + \frac{c_1^2 - c^2}{2g} = 0 . \tag{1}$$

D'altra parte l'eguaglianza delle portate attraverso alle due sezioni a monte e a valle (data la costanza della densità e ammessa l'identità geometrica delle due sezioni) porta a stabilire la seguente relazione:

$$c_1 H_1 = cH . \tag{2}$$

Basta ora eliminare H_1 tra le due relazioni (1) e (2) per ottenere la formola annunciata.

Matematica. — *Sulle serie di potenze di una variabile sommate col metodo di Borel generalizzato.* Nota I di GUSTAVO SANNIA, presentata dal Socio ENRICO D'OVIDIO.

1. In due recenti Note [1] ho trattato delle serie di potenze del tipo

$$u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \cdots + u_n z^n + \cdots , \tag{1}$$

interpretandole col nuovo *metodo di Borel generalizzato* [2], ed ho conseguito risultati di grande generalità e, spero, di qualche interesse.

Nella presente Nota ed in una successiva completerò la trattazione, rilevando ciò che chiamerò *sommabilità assoluta* (e di vario ordine) della (1) nella regione del piano complesso ove è sommabile, e dando poi, per la determinazione di questa regione, dei teoremi che fanno riscontro a quello di Cauchy-Hadamard sul raggio dell'ordinario cerchio di convergenza della serie.

Per comodità del lettore, premetterò un cenno di quei risultati che occorrono per il seguito.

2. Fissato un punto z, la (1) diventa una serie numerica, quindi (N, n. 1) è *sommabile* (B, r) (cioè *col metodo di Borel di ordine* r, ove r è un intero) se la serie

$$u^{(r)}(a, z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+r}\, z^{n+r} \frac{a^n}{n!} \qquad (u_{n+r}\, z^{n+r} = 0 \text{ se } n + r < 0) \tag{2}$$

[1] In corso di stampa negli Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino.

[2] Cfr. p. es. la mia Nota (che citerò con una N): *Generalizzazione del metodo di Borel per la sommazione delle serie* (questi Rendiconti, vol. XXVI, ser. 5ª, 1° sem., fasc. 11°).

è una trascendente intera, rispetto ad a, e l'integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-a}\, u^{(r)}(a\,,z)\, da \qquad (a \geq 0) \tag{3}$$

è convergente.

Allora la *somma* $u(z)$ della serie è lo stesso integrale (3), aumentato però della somma dei primi r termini della serie se $r < 0$.

3. La (1) è sempre sommabile $(B\,,r)$ (per ogni r) almeno in un punto: il punto $z = 0$ (¹). Ora se consideriamo una semiretta qualunque p uscente dal punto $O\,(z = 0)$, i punti z ove la (1) è sommabile $(B\,,r)$ (per un r fissato) *costituiscono un segmento di origine* O (dal quale va forse escluso solo l'estremo), finito o non e che può anche eventualmente ridursi al punto O.

Variando p intorno ad O, si ha che il luogo dei punti del piano ove la (1) è sommabile $(B\,,r)$ è una regione σ_r, semplicemente connessa, che può bene dirsi una *stella di centro* O (azla Mittag-Leffler). Vanno esclusi solo forse punti del contorno.

Essa contiene sempre l'ordinario cerchio di convergenza (²).

Variando l'intero r da $-\infty$ a $+\infty$, si ha una successione di metodi di Borel

$$\ldots\ldots, (B\,, -2)\,, (B\,, -1)\,, (B\,, 0)\,, (B\,, 2)\,, (B\,, 1)\,, \ldots\ldots, \tag{4}$$

quindi le *stelle di sommabilità* della (1) costituiscono una successione illimitata in due sensi

$$\ldots\ldots, \sigma_{-2}\,, \sigma_{-1}\,, \sigma_0\,, \sigma_1\,, \sigma_2\,, \ldots\ldots \tag{5}$$

Esse sono tali che *ciascuna contiene la seguente* (³); perciò ammettono due *stelle-limite* σ e τ, per $r = -\infty$ ed $r = +\infty$, tali che σ *le contiene tutte* e τ *è in tutte contenuta* (⁴).

σ (a parte il contorno) è il luogo dei punti ove la (1) è sommabile con qualcuno dei metodi (4) o, come diremo, è *sommabile* Bg (cioè *col metodo di Borel generalizzato*) (⁵).

τ (a parte il contorno) è il luogo dei punti ove la (1) è sommabile con tutti i metodi (4) o, come diremo, è *sommabile* Bt (cioè *totalmente sommabile*).

(¹) Come in ogni punto ove è convergente (N, n. 2).

(²) Sul quale, si noti, non facciamo alcuna ipotesi, sicchè può anche ridursi al centro O.

(³) Perchè se una serie è sommabile $(B\,,r)$, lo è anche $(B\,, r-1)$ (N, n. 2).

(⁴) Ma tuttavia contiene anch'essa il cerchio di convergenza (come le σ_r e σ).

(⁵) Ed è importante che nella stella σ si può (come nel cerchio di convergenza) operare sulla (1) con le regole ordinarie del Calcolo, algebrico e infinitesimale, e che queste operazioni si riflettono in altrettante analòghe operazioni sulla somma $u(z)$ della serie (Per tutto ciò, cfr. le Note citate in principio).

4. Quando in un punto z l'integrale (3) è convergente assolutamente, dirò che la serie (1) è *assolutamente sommabile* (B, r). Che se poi è tale per ogni valore dell'intero r, dirò che la (1) è *assolutamente sommabile* **B*t***.

TEOREMA. — *Nei punti interni in senso stretto alla stella* σ_r *la serie* (1) *è assolutamente sommabile* (B, $r-1$).

Per il centro O il teorema è evidente (¹) poichè $u^{(r)}(a, 0)$ vale zero se $r > 0$ e $u_0 \frac{a^{-r}}{(-r)!}$ se $r \leq 0$, quindi (3) è assolutamente convergente per ogni r.

Consideriamo dunque un punto z di σ_r diverso da 0, e che non stia sul contorno. In esso la (1) è sommabile (B, r), quindi l'integrale (3) è convergente; ma poichè z è contenuto anche in σ_{r-1} (che contiene σ_r) sarà del pari convergente l'integrale

$$\int_0^\infty e^{-a} u^{(r-1)}(a, z)\, da\,; \tag{6}$$

sicchè per giustificare l'enunciato, resta solo a dimostrare che lo è assolutamente.

Essendo

$$u^{(r-1)}(a, z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+r-1}\, z^{n+r-1} \frac{a^n}{n!} = z^{r-1} \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+r-1} \frac{(az)^n}{n!} = z^{r-1} u^{(r-1)}(az, 1),$$

se si pone $z = \varrho e^{i\theta}$ e poi $\varrho a = b$, l'integrale (6) diventa, a meno di un fattore,

$$\int_0^\infty e^{-\frac{b}{\varrho}} u^{(r-1)}(be^{i\theta}, 1)\, db. \tag{7}$$

Intanto dalla convergenza dell'integrale (3) in z, segue che (²)

$$\lim_{a=+\infty} e^{-a} u^{(r-1)}(a, z) = 0\,, \tag{8}$$

ossia

$$\lim_{b=+\infty} e^{-\frac{b}{\varrho}} u^{(r-1)}(be^{i\theta}, 1) = 0\,, \tag{9}$$

(¹) E segue anche dal n. 5.

(²) Poichè $u^{(r)}(a, z)$ è la derivata di $u^{(r-1)}(a, z)$ rispetto ad a ed intanto sussiste il teorema: *Se* $f'(a)$ *è la derivata di una trascendente intera* $f(a)$ *ed esiste l'integrale di* $e^{-a} f'(a)$ *tra i limiti* 0 *e* $+\infty$, *esiste anche quello di* $e^{-a} f(a)$ *e si ha inoltre* $\lim_{a=+\infty} e^{-a} f(a) = 0$. Cfr. Bromwich, *An introduction to the theory of infinite series*, n. 101 (Macmillan and Co, London, 1908), il che implica che la funzione di b

$$(10) \qquad |e^{-\frac{b}{\rho}} u^{(r-1)}(be^{i\theta}, 1)|$$

è limitata per $b \geq 0$.

Poichè il punto z prefissato in σ_r non giace sul contorno, possiamo assumerne un secondo $z_0 = \rho_0 e^{i\theta}$ di uguale argomento e di modulo ρ_0 maggiore; e quanto abbiamo detto fin qui sussiste nel nuovo punto: in particolare, sarà limitata, per $\rho = \rho_0$, la funzione (10) di b, ossia esiste un numero $K > 0$ tale che sia

$$|e^{-\frac{b}{\rho_0}} u^{(r-1)}(be^{i\theta}, 1)| < K \qquad \text{per} \quad b \geq 0 \,,$$

da cui

$$|e^{-\frac{b}{\rho}} u^{(r-1)}(be^{i\theta}, 1)| < K e^{b\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho}\right)} \qquad \text{per} \quad b \geq 0 \,.$$

Essendo $\rho_0 > \rho$, è certamente convergente l'integrale rispetto a b tra i limiti 0 e $+\infty$ del secondo membro [1], quindi è convergente *a fortiori* l'analogo integrale del primo membro, ossia l'integrale (7), è convergente assolutamente.

Cor. I. — *In ogni punto interno in senso stretto a* σ_r *la* (1) *è assolutamente sommabile* $(B, r - s)$ $(s = 1, 2, 3, \ldots)$

Poichè tal punto è anche interno in senso stretto a σ_{r-s+1}.

Cor. II. — *In ogni punto interno in senso stretto alla stella* τ, *la* (1) *è assolutamente sommabile* Bt.

Poichè tal punto è interno in senso stretto a ogni stella σ_r [2].

5. Le definizioni circa la sommabilità assoluta si applicano in particolare per $z = 1$, ossia ad una serie *numerica* qualunque

$$(11) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

[1] Vale $K : \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho}\right)$.

[2] Il Borel ha chiamato *assolutamente sommabile* (senz'altro) la serie (1) quando (3) è convergente assolutamente per ogni *r positivo o nullo*, ed ha considerata la regione del piano ove la (1) è assolutamente sommabile, chiamandola *poligono di sommabilità* (almeno nel caso in cui il raggio di convergenza della serie non è nullo).

Poichè, come risulta dalle definizioni, una serie assolutamente sommabile Bt è anche assolutamente sommabile (nel senso di Borel), e non viceversa in generale, si sarebbe indotti ad asserire che il poligono di sommabilità contiene la nostra stella τ. Invece ho dimostrato (nelle Note già citate in principio) che il poligono e la stella *coincidono*.

Così è facile dimostrare che: *una serie* (1) *assolutamente convergente è assolutamente sommabile* B*t* [1].

Poichè allora la serie $|u_0| + |u_1| + |u_2| + \cdots$ è convergente e quindi (N, n. 4) è sommabile B*t*; sicchè per ogni r è convergente l'integrale

$$\int_0^\infty e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} |u_{n+r}| \frac{a^n}{n!} \, da$$

e quindi *a fortiori* l'integrale

$$\int_0^\infty e^{-a} \left| \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+r} \frac{a^n}{n!} \right| da .$$

ossia la (11) è assolutamente sommabile (B, r) per ogni r.

[1] Cioè più che assolutamente sommabile nel senso di Borel, come aveva dimostrato Hardy in Quarterly Journal of Math., vol. 35, 1903, pag. 22.

COMUNICAZIONI VARIE

Nell'adunanza delle due Classi del 19 gennaio 1918, il Segretario Millosevich presentò un piego suggellato, inviato dai signori: prof. V. Grandis, ing. C. Cesari e D. Garbarino, per esser conservato negli archivi accademici.

Nella stessa seduta, il Socio prof. C. Somigliana offerse una copia del volume I, testè pubblicato sotto gli auspici della R. Accademia dei Lincei e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, delle *Opere di Alessandro Volta*. Il Socio Somigliana dette ampia notizia del volume predetto, mettendone in luce la importanza per esser tutto consacrato alla scoperta della pila, e ai documenti relativi alla scoperta stessa. La Commissione che diresse la edizione era composta dei senatori Blaserna, Celoria e Volterra, e dei professori Naccari, Somigliana e A. Volta junior (oggi defunto); il volume fu ordinato e curato dal dott. A. Sozzani (defunto) e dal dott. L. Volta. Il Socio Somigliana chiuse la sua interessante comunicazione rilevando come l'opera ora pubblicata sia degna non solo del grande scienziato italiano che s'intende onorare, ma degna anche del momento attuale, nel quale le scoperte fondamentali, da cui derivarono incommensurabili benefici all'umanità, come è appunto quella della pila, devono essere bene illustrate e rigorosamente documentate.

L'intera Accademia ascoltò con intenso interesse la lucida esposizione del Socio Somigliana, che ebbe parte precipua nella pubblicazione, ed espresse l'augurio che il monumento eretto in onore del grande Comasco sia presto condotto a compimento.

E. M.