ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

L'elemento che tanto nell'accrescimento quanto nella dissoluzione di un cristallo entra in giuoco è la costante capillare delle facce. Non vi è alcun mezzo per determinarla; si sa solo che essa è diversa per le diverse facce, è più piccola per le facce più sviluppate, più grande per le rudimentali. Ma se non abbiamo il mezzo di determinarla, possiamo nondimeno paragonarla a valori conosciuti. Riprendiamo a questo proposito l'equazione

$$\frac{Q}{T} = \frac{3}{M}\frac{v}{t}. \tag{6}$$

Se in un processo riversibile possono essere determinati sperimentalmente il calore di trasformazione Q e il punto di trasformazione T, essendo v e t pure misurabili, ricaveremo dalla (6) il mezzo di valutare la costante M:

$$\frac{p}{\alpha} = M = 3\frac{T}{t}\cdot\frac{v}{Q},$$

essendo p la distanza perpendicolare di una faccia del cristallo da un centro d'origine O, ossia $2p$ la distanza perpendicolare fra due facce parallele aventi la stessa costante capillare α, energia necessaria per dare alla detta faccia l'unità di area. Il valore della costante capillare α può dunque essere rappresentato nel modo seguente:

$$\alpha = \frac{p}{3}\frac{t}{T}\cdot\frac{G}{v}. \tag{11}$$

Sarebbe da studiare lo stesso problema per le modificazioni irriversibili, per le soluzioni e le fusioni di cristalli misti. Ma come questa questione richiede un trattamento diverso, mi riservo di riprenderlo in un'altra Nota.

Meccanica. — *Su di una particolare classe di coazioni elastiche che si incontra nello studio della resistenza delle artiglierie.* Nota di Gustavo Colonnetti, presentata dal Socio Gian Antonio Maggi [1].

Un anno fa ho pubblicate in questi stessi Rendiconti [2] alcune considerazioni intese a porre in evidenza la opportunità di dare un assetto organico alla teoria di quegli stati di coazione elastica in assenza di forze esterne che non rientrano nella categoria, ormai nettamente definita e circoscritta, delle distorsioni.

Mi ripromettevo allora di iniziare uno studio sistematico dell'argomento; le occupazioni createmi dallo stato di guerra mi hanno impedito e mi im-

[1] Pervenuta all'Accademia il 9 settembre 1918.

[2] G. Colonnetti, *Su certi stati di coazione elastica che non dipendono da azioni esterne*. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXVI, serie 5ª, 2° sem. 1917.

pediscono tuttora di dar seguito a quel mio proposito, ma mi hanno per compenso offerta più di una occasione di maggiormente convincermi della importanza, anche pratica, della questione. Sulla quale chiedo pertanto alla Accademia il permesso di ritornare, sia pur soltanto incidentalmente, per trattare in questa Nota un problema che interessa assai da vicino la teoria della resistenza delle artiglierie, e per generalizzare poi, in una Nota seguente, uno dei risultati a cui qui perverrò.

Consideriamo un solido elastico, omogeneo ed isotropo, limitato da due superficie cilindriche coassiali di raggi r_0 ed r_1 e proponiamoci di caratterizzarne gli stati di coazione elastica simmetrici tanto rispetto ai piani passanti per l'asse come rispetto ai piani ad esso normali.

Prendiamo a tal fine in esame l'intorno di un punto generico del solido, orientando gli assi di riferimento secondo le tre direzioni principali: una, z, parallela all'asse del cilindro, un'altra, r, perpendicolare ad esso, la terza, t, normale alle precedenti.

L'energia potenziale elastica elementare si potrà allora esprimere sotto la forma, notissima,

$$\varphi = G\left[\varepsilon_z^2 + \varepsilon_r^2 + \varepsilon_t^2 + \frac{1}{m-2}(\varepsilon_z + \varepsilon_r + \varepsilon_t)^2\right],$$

dove G ed m sono costanti e misurano rispettivamente il modulo di elasticità trasversale ed il coefficiente di contrazione laterale del materiale, mentre ε_z, ε_r, ε_t rappresentano le tre dilatazioni principali e sono, nelle ipotesi fatte, da considerarsi come delle funzioni (piccolissime) della sola distanza r del punto generico considerato dall'asse.

Prescinderemo in ciò che segue da ogni deformazione assiale, supporremo cioè

$$\varepsilon_z = 0$$

non senza avvertire che da questa ipotesi restrittiva, giustificabile soltanto fin che si tratta di cilindri indefiniti, si può facilmente liberarsi, quando si passa al caso pratico dei cilindri di lunghezza finita, mediante un noto procedimento di sovrapposizione che è già stato utilmente applicato in casi consimili dal prof. Volterra [1].

L'energia potenziale elastica relativa ad un tronco di solido limitato da due sezioni rette, che per semplicità di scrittura riterremo situate a distanza eguale all'unità di lunghezza, risulterà così espressa da

$$\Phi = 2\pi G \int_{r_0}^{r_1} \left[\varepsilon_r^2 + \varepsilon_t^2 + \frac{1}{m-2}(\varepsilon_r + \varepsilon_t)^2\right] r\, dr\,.$$

[1] V. Volterra, *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes*. Annales de l'École Normale, 3, XXIV, septembre 1907.

Ciò posto introduciamo l'ipotesi che, nello stato preso in esame, il solido dato si trovi in equilibrio stabile in assenza di forze esterne. Dovrà la sua energia potenziale elastica essere minima per rispetto a tutte le variazioni di configurazione virtuali, cioè compatibili e piccolissime, che noi possiamo immaginare di imprimergli.

Ferme restando le condizioni di simmetria e le altre restrizioni sopra imposte, noi ci limiteremo a considerare quelle variazioni di configurazione che si ottengono trasformando ogni superficie cilindrica coassiale col solido dato ed avente il raggio generico r (naturalmente compreso fra r_0 ed r_1) in un'altra superficie pure cilindrica, ancora coassiale con esso, ed avente il raggio $r + \varrho$ (dove ϱ si suppone funzione continua, uniforme e piccolissima della variabile r).

È facile verificare che le dilatazioni principali ε_r, ε_t dell'elemento generico debbono, dopo una tale variazione di configurazione, diventare rispettivamente

$$\varepsilon_r + \frac{d\varrho}{dr} \quad , \quad \varepsilon_t + \frac{\varrho}{r} .$$

Ne segue l'espressione della variazione prima dell'energia potenziale elastica

$$\delta\Phi = 4\pi G \int_{r_0}^{r_1} \left[\varepsilon_r \frac{d\varrho}{dr} + \varepsilon_t \frac{\varrho}{r} + \frac{1}{m-2} (\varepsilon_r + \varepsilon_t) \left(\frac{d\varrho}{dr} + \frac{\varrho}{r} \right) \right] r\, dr .$$

Per l'equilibrio dovrà dunque riuscir verificata la condizione:

$$\int_{r_0}^{r_1} \left[\varepsilon_r \frac{d\varrho}{dr} + \varepsilon_t \frac{\varrho}{r} + \frac{1}{m-2} (\varepsilon_r + \varepsilon_t) \left(\frac{d\varrho}{dr} + \frac{\varrho}{r} \right) \right] r\, dr = 0$$

ossia

$$\int_{r_0}^{r_1} r \left[\varepsilon_r + \frac{1}{m-2} (\varepsilon_r + \varepsilon_t) \right] \frac{d\varrho}{dr}\, dr + \\ + \int_{r_0}^{r_1} \varrho \left[\varepsilon_t + \frac{1}{m-2} (\varepsilon_r + \varepsilon_t) \right] dr = 0 .$$

Nell'ipotesi che la funzione

$$\varepsilon_r + \frac{1}{m-2} (\varepsilon_r + \varepsilon_r)$$

sia continua e dotata di derivata limitata in tutto l'intervallo $r_0\, r_1$ [1], si

[1] Quest'ipotesi non costituisce una limitazione in quanto le grandezze fisiche che la funzione in discorso e la sua derivata rappresentano debbono ad essa soddisfare necessariamente (Cfr. Somigliana, *Sulla teoria delle distorsioni elastiche*, Rend. R. Accad. dei Lincei, vol. XXIII, ser. 5ª, 1° sem. 1914).

può porre

$$r\left[\varepsilon_r+\frac{1}{m-2}(\varepsilon_r+\varepsilon_t)\right]\frac{d\varrho}{dr}=\frac{d}{dr}\left\{\varrho r\left[\varepsilon_r+\frac{1}{m-2}(\varepsilon_r+\varepsilon_t)\right]\right\}-$$

$$-\varrho\frac{d}{dr}\left\{r\left[\varepsilon_r+\frac{1}{m-2}(\varepsilon_r+\varepsilon_t)\right]\right\}=\frac{d}{dr}\left\{\varrho r\left[\varepsilon_r+\frac{1}{m-2}(\varepsilon_r+\varepsilon_t)\right]\right\}-$$

$$-\varrho r\frac{d}{dr}\left[\varepsilon_r+\frac{1}{m-2}(\varepsilon_r+\varepsilon_t)\right]-\varrho\left[\varepsilon_r+\frac{1}{m-2}(\varepsilon_r+\varepsilon_t)\right],$$

sicchè l'equazione di condizione diviene

$$\int_{r_0}^{r_1}\frac{d}{dr}\left\{\varrho r\left[\varepsilon_r+\frac{1}{m-2}(\varepsilon_r+\varepsilon_t)\right]\right\}dr-$$

$$-\int_{r_0}^{r_1}\varrho r\frac{d}{dr}\left[\varepsilon_r+\frac{1}{m-2}(\varepsilon_r+\varepsilon_t)\right]dr-\int_{r_0}^{r_1}\varrho(\varepsilon_r-\varepsilon_t)\,dr=0\,.$$

E finalmente, eseguendo l'integrazione indicata nel primo termine, e riducendo, si ha

$$\Big|_{r_0}^{r_1}\varrho r\left[\varepsilon_r+\frac{1}{m-2}(\varepsilon_r+\varepsilon_t)\right]-$$

$$-\int_{r_0}^{r_1}\varrho\left\{r\frac{d}{dr}\left[\varepsilon_r+\frac{1}{m-2}(\varepsilon_r+\varepsilon_t)\right]+(\varepsilon_r-\varepsilon_t)\right\}dr=0\,.$$

Questa condizione deve riuscire identicamente verificata qualunque siano i valori che si attribuiscono alla funzione ϱ; perciò occorre notoriamente che si abbia qualunque sia r

[I] $$\frac{d}{dr}\left[\varepsilon_r+\frac{1}{m-2}(\varepsilon_r+\varepsilon_t)\right]=\frac{\varepsilon_t-\varepsilon_r}{r}$$

ed inoltre

[II] $$\varepsilon_r+\frac{1}{m-2}(\varepsilon_r+\varepsilon_t)=0\,. \qquad \text{per}\begin{cases} r=r_0\\ r=r_1\end{cases}$$

È facile mettere in evidenza il significato meccanico di queste condizioni. Basta introdurre le tensioni principali, che indicheremo per ovvie ragioni di analogia rispettivamente con σ_z, σ_r, σ_t e ricordare che esse sono legate alle dilatazioni dalle relazioni

$$\sigma_z=\frac{2G}{m-2}(\varepsilon_r+\varepsilon_t)$$

$$\sigma_r=2G\left[\varepsilon_r+\frac{1}{m-2}(\varepsilon_r+\varepsilon_t)\right]$$

$$\sigma_t=2G\left[\varepsilon_t+\frac{1}{m-2}(\varepsilon_r+\varepsilon_t)\right].$$

L'equazione indefinita (I) diviene allora immediatamente

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{\sigma_t - \sigma_r}{r}$$

o, ciò che fa lo stesso,

$$\text{[III]} \qquad \frac{d(r\sigma_r)}{dr} = \sigma_t .$$

Invece le equazioni ai limiti (II) si riducono, come era facilmente prevedibile, alla duplice condizione

$$\text{[IV]} \qquad \sigma_r = 0 \qquad \text{per} \begin{cases} r = r_0 \\ r = r_1 \end{cases} .$$

Il problema così impostato si può evidentemente risolvere in infiniti modi scegliendo la σ_r ad arbitrio — con la sola riserva che essa sia continua, dotata di derivata limitata in tutto l'intervallo $r_0 r_1$, e soddisfi agli estremi di esso alla (IV) — e deducendone poi secondo la (III) la σ_t.

Resta ben inteso che gli stati di deformazione che così si vengono a definire non soddisferanno *in generale* alle equazioni cosidette di congruenza, o di Saint-Venant, dalle quali noi abbiamo di proposito fatto astrazione.

Si può anzi, volendo, precisare: è infatti fuor di dubbio che il supporre ovunque soddisfatte dette equazioni non potrebbe che condurci ad una particolare distorsione di Volterra.

Altri casi particolari — distorsioni di Somigliana — si otterrebbero supponendo che le equazioni di congruenza fossero soddisfatte in tutto lo spazio occupato dal solido, eccezion fatta soltanto per certe ben determinate superficie che, in omaggio alle premesse ipotesi di simmetria, dovranno essere cilindriche e coassiali al solido stesso. È facile riconoscere che tra questi casi particolari sono compresi tutti quelli che abitualmente si realizzano nella costruzione delle artiglierie investendo a forza l'uno sull'altro più tubi così predisposti che il diametro esterno iniziale di ciascuno di essi sia leggermente maggiore del diametro interno iniziale di quello che lo dovrà abbracciare.

Ma i casi più tipici e generali si ottengono soltanto quando dalle equazioni di congruenza si prescinda completamente; si trovano allora, fra gli altri, tutti quegli stati, detti di *forzamento continuo*, che si producono spontaneamente quando si sottopone un cilindro cavo all'azione di pressioni interne così intense da determinarvi delle deformazioni permanenti; accade infatti che, così operando, gli strati interni, più deformati, mantengono poi in tensione gli strati esterni (anche dopo che la pressione ha cessato di agire), mentre alla lor volta, per reazione, vengono a trovarsi compressi.

Siffatti stati di coazione vennero recentemente preconizzati dagli ingegneri Jacob e Malaval dell'Artiglieria navale francese come quelli che, rea-

lizzando la più completa utilizzazione delle proprietà resistenti dei materiali, permetterebbero alle moderne artiglierie di sopportare, senza ulteriori deformazioni permanenti, pressioni di gran lunga più elevate di quelle tollerate in passato [1].

Io non posso nè debbo, per ragioni ovvie, entrar qui nella discussione dei problemi tecnici a cui alludo. Mi limito ad accennare ad una notevole proprietà comune a tutti questi stati di coazione; proprietà che in certi casi particolari era già stata rilevata da tempo, ma che ora riesce facile stabilire in modo assai più generale.

Prendiamo a tal fine in considerazione l'espressione della dilatazione cubica elementare

$$\Theta = \varepsilon_z + \varepsilon_r + \varepsilon_t .$$

Tenuto il debito conto delle ipotesi da noi fatte, nonchè dei risultati che ne abbiamo dedotti, essa può scriversi

$$\Theta = \frac{m-2}{2mG}(\sigma_r + \sigma_t) = \frac{m-2}{2mG}\left[\sigma_r + \frac{d(r\sigma_r)}{dr}\right].$$

Per conseguenza la dilatazione cubica totale, pel solito tronco di cilindro di lunghezza unitaria, sarà misurata da

$$2\pi \int_{r_0}^{r_1} \Theta r\, dr = \frac{m-2}{mG}\pi \int_{r_0}^{r_1}\left[\sigma_r + \frac{d(r\sigma_r)}{dr}\right] r\, dr =$$

$$= \frac{m-2}{mG}\pi \int_{r_0}^{r_1} \frac{d}{dr}(r^2\sigma_r)\, dr = \frac{m-2}{mG}\pi \Big|_{r_0}^{r_1} r^2\sigma_r .$$

Ma, secondo la (IV), σ_r si deve annullare tanto per $r = r_0$ come per $r = r_1$; la dilatazione cubica totale è adunque identicamente nulla.

In altre parole, il volume complessivo del tubo nello stato di coazione elastica che esso assume a riposo è identicamente eguale alla somma dei volumi che spetterebbero ai singoli elementi che lo compongono qualora questi, resi indipendenti gli uni dagli altri, potessero tutti assumere il loro stato naturale non deformato.

[1] Cfr. E. Bravetta, *La resistenza delle artiglierie*. Ed. Carlo Pasta, Torino, 1913.