ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

Analisi. — *Sulle equazioni integrali*. Nota I di Pia Nalli, presentata dal Socio S. Pincherle [1].

1. In questa ed in altre Note riassumerò alcuni risultati da me ottenuti studiando due equazioni integrali, che comprendono come casi particolari quelle di Fredholm, di prima e seconda specie, a nucleo simmetrico.

Sia $K(s,t)$ una funzione reale definita nel dominio $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq b$, simmetrica e sommabile in detto dominio insieme col suo quadrato, sia poi $k(s)$ una funzione reale, misurabile, limitata, definita in (a,b).

Mi occupo dello studio delle seguenti equazioni integrali:

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda k(s)\,\varphi(s) + \lambda \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt \tag{1}$$

$$0 = f(s) + k(s)\,\varphi(s) + \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt\,, \tag{2}$$

dove λ è costante, e che per $k(s) = 0$ si riducono alle note equazioni di Fredholm di seconda e prima specie, a nucleo simmetrico.

2. Introduciamo alcune definizioni.

Data una funzione reale $g_0(s)$, definita in (a,b), e sommabile in questo intervallo insieme col suo quadrato, chiameremo *iterate di* $g_0(s)$ *relativamente a* $K(s,t)$ *e* $k(s)$ le funzioni $g_1(s), g_2(s), \ldots\ldots$ definite dalle relazioni

$$g_n(s) = k(s)\,g_{n-1}(s) + \int_a^b K(s,t)\,g_{n-1}(t)\,dt \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Chiameremo $g_n(s)$ *iterata di ordine* n.

Se m, n ed r sono tre interi positivi ed $r \leq n$ si ha, per le iterate di due funzioni $g_0(s)$ e $f_0(s)$,

$$\int_a^b g_n(s)\,f_m(s)\,ds = \int_a^b g_{n-r}(s)\,f_{m+r}(s)\,ds\,. \tag{4}$$

Facilmente si stabilisce la seguente relazione

$$g_n(s) = k^n(s)\,g(s) + \int_a^b K^{(n)}(s,t)\,g(t)\,dt^*,$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 6 settembre 1918.

essendo

$$(5)\quad \begin{cases} K^{(1)}(s\,,t) = K(s\,,t) \\ K^{(n)}(s\,,t) = k(s)\,K^{(n-1)}(s\,,t) + \int_a^b K(s\,,v)\,K^{(n-1)}(v\,,t)\,dv + \\ \qquad + k^{n-1}(t)\,K(s\,,t) \qquad (n = 2\,,3\,,\ldots). \end{cases}$$

Se μ e ν sono due interi positivi si ha

$$(6)\quad K^{(\mu+\nu)}(s\,,t) = k^{\nu}(s)\,K^{(\mu)}(s\,,t) + k^{\mu}(t)\,K^{(\nu)}(s\,,t) + \\ + \int_a^b K^{(\nu)}(s\,,v)\,K^{(\mu)}(v\,,t)\,dv\,,$$

la quale dimostra che $K^{(n)}(s\,,t)$ *è funzione simmetrica di* s *e* t.

Per $k(s) = 0$ le $K^{(n)}(st)$ si riducono agli iterati del nucleo $K(s\,,t)$, nel senso di Fredholm. Noi chiameremo $K^{(n)}(s\,,t)$ n^{esimo} *nucleo iterato di* $K(s\,,t)$ *per mezzo di* $k(s)$.

Dalla (6) si trae facilmente che *il nucleo iterato di ordine* m *di* $K^{(n)}(s\,,t)$ *per mezzo di* $k^n(s)$ *coincide col nucleo iterato di ordine* nm *di* $K(s\,,t)$ *per mezzo di* $k(s)$.

Formiamo le iterate di $K^{(r)}(s\,,t)$, dove t si considera come costante, relative a $K^{(r)}(s\,,t)$ e $k^r(s)$, e denotiamo con $G_n^{(r)}(s\,,t)$ la iterata di ordine $n-1$ e con $G_1^{(r)}(s\,,t)$ la stessa $K^{(r)}(s\,,t)$, ossia poniamo

$$G_n^{(r)}(s\,,t) = k^r(s)\,G_{n-1}^{(r)}(s\,,t) + \int_a^b K^{(r)}(v\,,s)\,G_{n-1}^{(r)}(v\,,t)\,dv,$$
$$(n = 2\,,3\,,\ldots)\;,\;(r = 1\,,2\,,\ldots).$$

Si dimostra la seguente eguaglianza

$$(7)\quad G_n^{(r)}(s\,,t) = K^{(nr)}(s\,,t) - k^r(t)\,K^{((n-1)r)}(s\,,t)\,,$$

quindi, per l'equazione di Fredholm le $G_n^{(r)}(s\,,t)$ si riducono ai nuclei iterati.

Dalla (7), per $r = 1$, si trae

$$K^{(n)}(s\,,t) = \sum_{m=0}^{n-1} k^m(t)\,G_{n-m}^{(1)}(s\,,t)$$

e perciò

$$(8)\quad G_n^{(r)}(s\,,t) = \sum_{m=}^{r-1} k^m(t)\,G_{nr-m}^{(1)}(s\,,t).$$

Per la (4) poi si ha

$$(9)\quad G_{\mu+\nu}^{(r)}(s\,,t) = k^r(s)\,G_{\mu+\nu-1}^{(r)}(s\,,t) + \int_a^b G_{\mu}^{(r)}(v\,,t)\,G_{\nu}^{(r)}(v\,,s)\,dv\,,$$

e per mezzo di questa si può dimostrare che, fissato r, se per qualche n si ha $G_n^{(r)}(s, t) = 0$ quasi dapertutto, sarà allora quasi dapertutto $G_n^{(r)}(s, t) = 0$ per $n \geq 2$.

3. Introduciamo ora altre definizioni. Se una funzione $\varphi(s)$, reale o complessa, definita in (a, b) e sommabile in questo intervallo insieme col quadrato del suo modulo, non nulla quasi dapertutto, soddisfa quasi dapertutto all'eguaglianza

$$(\mu - k(s))\,\varphi(s) = \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt,$$

μ essendo una conveniente costante, chiameremo $\varphi(s)$ una *funzione fondamentale* e μ la corrispondente *costante caratteristica* relative al nucleo $K(s, t)$ ed alla funzione $k(s)$.

Inoltre, se non è quasi dapertutto $(\mu - k(s))\,\varphi(s) = 0$ chiameremo $\varphi(s)$ *funzione fondamentale propria*, la chiameremo *impropria* nel caso contrario.

Se $k(s) = 0$ si ricade nelle funzioni fondamentali nel senso di Fredholm.

Una combinazione lineare a coefficienti costanti di un numero finito di funzioni fondamentali corrispondenti alla stessa costante caratteristica è funzione fondamentale corrispondente alla stessa costante.

Se $\varphi_1(s)$ e $\varphi_2(s)$ sono funzioni fondamentali corrispondenti a costanti caratteristiche diverse si ha $\int_a^b \varphi_1(s)\,\varphi_2(s)\,ds = 0$.

Risulta di qui che *le costanti caratteristiche sono reali e costituiscono un insieme numerabile* e che *la ricerca delle funzioni fondamentali può limitarsi a quelle delle funzioni fondamentali reali.*

4. Abbiamo i seguenti teoremi, estensioni di altri noti relativi alle funzioni fondamentali nel senso di Fredholm.

I. *Ogni funzione fondamentale relativa al nucleo $K(s, t)$ ed alla funzione $k(s)$, corrispondente alla costante caratteristica μ, è anche funzione fondamentale relativamente al nucleo $K^{(n)}(s, t)$ ed alla funzione $k^n(s)$, corrispondente alla costante caratteristica μ^n.*

II. Inversamente *se n è dispari, ogni funzione fondamentale relativa a $K^{(n)}(s, t)$ e $k^n(s)$ corrispondente alla costante μ lo è anche relativamente a $K(s, t)$ e $k(s)$ e corrisponde alla costante $\sqrt[n]{\mu}$, la radice essendo presa nel senso aritmetico.*

Se n è pari e $\varphi(s)$ è una funzione fondamentale relativa a $K^{(n)}(s, t)$ e $k^n(s)$ corrispondente alla costante μ, si ha $\mu \geq 0$ ed allora: o $\varphi(s)$ è funzione fondamentale relativamente a $K(s, t)$ e $k(s)$ corrispondente alla costante $\sqrt[n]{\mu}$, la radice reale essendo presa con segno conveniente, ovvero $\varphi(s)$ è la somma di due tali funzioni, $\varphi_1(s)$ e $\varphi_2(s)$, corrispondenti alle costanti caratteristiche $\pm\sqrt[n]{\mu}$. Si presenta il primo caso per $\mu = 0$.

5. Cominceremo con l'occuparci di alcuni casi particolari.

Supponiamo che qualcuno dei nuclei iterati di $K(s,t)$ per mezzo di $k(s)$ sia nullo e sia $K^{(r)}(s,t)$ il primo che si annulla ([1]).

Si dimostra che si ha $r=2$, quindi per n pari $K^{(n)}(s,t)=0$ e per n dispari $K^{(n)}(s,t)=k^{n-1}(t)K(s,t)$.

Si ha dunque

$$(k(s)+k(t))\,K(s,t)+\int_a^b K(s,v)\,K(v,t)\,dv=0\,. \tag{10}$$

Si trovano in questo caso notevoli proprietà della funzione $K(s,t)$ e si arriva fra l'altro alla seguente conclusione: *relativamente al nucleo* $K(s,t)$ *ed alla funzione* $k(s)$ *esistono le funzioni fondamentali proprie* $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, .. *formanti un sistema ortogonale e corrispondenti alle costanti caratteristiche* $\mu_1, \mu_2, \ldots$ (non necessariamente distinte) *ed è*

$$(\mu_n^2-k^2(s))\,\varphi_n(s)=0$$

e verso la funzione $K(s,t)$ *converge in media la successione delle somme parziali della serie* $\sum_{n=1}^{\infty}(\mu_n-k(s))\,\varphi_n(s)\,\varphi_n(t)$, ciò che scriviamo nel seguente modo

$$K(s,t)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(\mu_n-k(s))\,\varphi_n(s)\,\varphi_n(t)\,. \tag{11}$$

Questa si può considerare come una generalizzazione della formula

$$K(s,t)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\,\psi_n(s)\,\psi_n(t) \tag{12}$$

che lega il nucleo simmetrico $K(s,t)$ alle funzioni $\psi_n(s)$ fondamentali nel senso di Fredholm ed alle corrispondenti costanti caratteristiche λ_n.

Tutte le volte che è valida la (11) si trovano facilmente (come mostreremo in altra Nota) le condizioni necessarie e sufficienti a cui deve soddisfare una funzione $f(s)$ perchè le (1) e (2) ammettano soluzioni, condizioni che per la (1) dipendono dal valore di λ, e soddisfatte queste condizioni si trova la forma generale delle soluzioni. Si generalizzano così alcuni risultati noti di Schmidt e Picard ([2]).

([1]) È superfluo avvertire che supponiamo sempre che le eguaglianze fra funzioni valgano quasi dapertutto, fatta cioè eventualmente eccezione per insiemi di punti di misura nulla (misura lineare o superficiale a seconda dei casi).

([2]) E. Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen*, I Teil [Mathematische Annalen, Bd 63 (1907), pp. 433-476]. E. Picard, *Sur un Théorème général relatif aux équations intégrales de première espèce* etc. [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, vol. 29 (1910), pp. 79-97].

Notiamo ancora che si arriva alla (11) nel caso particolare esaminato risolvendo l'equazione funzionale (10) nelle funzioni incognite $K(s, t)$ e $k(s)$.

6. Le condizioni del n. precedente mostrano come sarebbe interessante di poter mettere in ogni caso la funzione $K(s, t)$ sotto la forma (11).

A questo proposito sono interessanti le seguenti proposizioni:

Se vale la (11), *si avrà per qualunque* $r \geq 1$

$$K^{(r)}(s, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n^r - k^r(s))\, \varphi_n(s)\, \varphi_n(t) .$$

Se per qualche r *si ha*

$$K^{(r)}(s, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - k^r(s))\, \psi_n(s)\, \psi_n(t) ,$$

le $\psi_n(s)$ *formando un sistema ortogonale, si potrà porre*

$$K^{(r)}(s, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n^r - k^r(s))\, \varphi_n(s)\, \varphi(t) ,$$

dove le $\varphi_n(s)$ *formano ancora un sistema ortogonale e* $\varphi_n(s)$ *è una funzione fondamentale propria relativa a* $K(s, t)$ *e* $k(s)$, *corrispondente alla costante* μ_n.

Se è

$$K^{(2)}(s, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n^2 - k^2(s))\, \varphi_n(s)\, \varphi_n(t) ,$$

le $\varphi_n(s)$ *formando un sistema ortogonale, e* $\varphi_n(s)$ *essendo una funzione fondamentale propria relativa a* $K(s, t)$ *e* $k(s)$, *corrispondente alla costante* μ_n, *si avrà*

$$K(s, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - k(s))\, \varphi_n(s)\, \varphi_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (\mu'_n - k(s))\, \varphi'_n(s)\, \varphi'_n(t)$$

le $\varphi_n(s)$ *e* $\varphi'_n(s)$ *formando insieme un sistema ortogonale ed essendo* $(\mu'^2_n - k^2(s))\, \varphi'_n(s) = 0$: in altri termini *se una relazione analoga alla* (11) *vale per una delle due funzioni* $K(s, t)$ *e* $K^{(2)}(s, t)$, *vale anche per l'altra.*

7. Un caso particolare interessante in cui la (11) diventa una generalizzazione della (12) è quello in cui $k(s)$ prende solamente un numero finito di valori, fatta eventualmente eccezione di valori presi in un insieme di punti s di misura nulla.

Infatti, siano n valori di $k(s)$ e supponiamo di avere dimostrata la (11) quando $k(s)$ prende $n - 1$ valori al più.

Se v_1 e v_2 sono due dei valori di $k(s)$ e si pone $h = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$, se formiamo il secondo nucleo iterato di $K(s, t)$ per mezzo di $k(s) - h$, e lo chiamiamo $P_2(s,t)$, siccome $(k(s)-h)^2$ prende al più $n-1$ valori, per la $P_2(s,t)$ varrà una relazione analoga alla (11) e perciò varrà anche per $K(s,t)$, quando si sostituisca $k(s)$ con $k(s)-h$, ma ciò non altera la forma della (11).

Vale dunque la (11) per qualunque valore di n, se vale per $n=1$.

Ora per $n=1$ $k(s)$ è una costante $(k(s)=\mu)$ e la (12) si può scrivere

$$K(s,t)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(\mu+\lambda_n-k(s))\,\psi_n(s)\,\psi_n(t)$$

che ha precisamente la forma (11).

In seguito troveremo altri casi in cui vale la (11).

8. Un altro caso particolare è quello in cui si ha per qualche r $G_2^{(r)}(s,t)=0$.

Si dimostra che si possono dare due casi: o è $G_2^{(1)}(s,t)=0$ ed allora si ha per qualunque r ed $n\geq 2$ $G_n^{(r)}(s,t)=0$, ovvero è $G_2^{(1)}(s,t)\neq 0$ e $G_2^{(2)}(s,t)=0$ ed allora si ha per r pari ed $n\geq 2$ $G_n^{(r)}(s,t)=0$.

Nel primo caso si ha

$$K(s,t)\sim-\sum_{n=1}^{\infty}k(s)\,\varphi_n(s)\,\varphi_n(t)$$

dove le $\varphi_n(s)$ formano un sistema ortogonale e sono funzioni fondamentali proprie corrispondenti alla costante caratteristica zero. Si ha $k(s)\,\varphi_n(s)=$ $=\lambda_n\,\varphi_n(s)$, con λ_n costante.

Nel secondo caso

$$K(s,t)\sim-\sum_{n=1}^{\infty}k(s)\,\varphi_n(s)\,\varphi_n(t)+\sum_{n=1}^{\infty}(\mu'_n-k(s)\,\varphi'_n(s)\,\varphi'_n(t)\,,$$

dove le $\varphi_n(s)$ e $\varphi'_n(s)$ formano insieme un sistema ortogonale, $\varphi_n(s)$ è una funzione fondamentale propria corrispondente alla costante zero, $\varphi'_n(s)$ è una funzione fondamentale propria corrispondente alla costante μ'_n.

Si ha qui $(\mu'^2_n-k^2(s))\,\varphi'_n(s)=0, k^2(s)\,\varphi_n(s)=\lambda_n^2\,\varphi_n(s)$ con λ_n costante.

Si conclude dunque che se per qualche coppia n, r risulta $G_n^{(r)}(s,t)=0$ vale la (11).