ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

Matematica. — *Fondamenti della geometria proiettivo-differenziale di una superficie.* Nota I del Corrisp. GUIDO FUBINI [1].

1. La geometria differenziale classica studia le proprietà differenziali di una superficie invarianti per il gruppo dei *movimenti*; scopo di questo lavoro è di porre i fondamenti *analitici* della geometria differenziale di una superficie rispetto al gruppo *proiettivo*. E in una Nota, in corso di stampa negli Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, se ne daranno le prime applicazioni *geometriche*. Già in precedenti ricerche [2] mi ero occupato di questo problema, e avevo provato che l'ufficio compiuto per la geometria differenziale *metrica* di una superficie dalle *forme di Gauss* veniva nel caso proiettivo compiuto da altre forme differenziali. Queste o si potevano ridurre ad una sola ai differenziali terzi, o, molto più semplicemente, si potevano ridurre a un sistema di tre forme nei differenziali primi. Le prime due, una quadratica ed una cubica, corrispondono all'*elemento lineare*, ed erano da me definite quasi sempre soltanto a meno di un fattore; quanto alla terza forma, anch'essa quadratica, io ero riuscito soltanto a scriverla in coordinate assintotiche (cioè supponendo assintotiche le linee coordinate).

Normalizzare [3] le prime due forme (*elemento lineare proiettivo*), *normare* le coordinate *omogenee* di un punto della superficie, così da ridurre la teoria ad una semplicità insperata; trovare tutte le relazioni tra le nostre forme, e le coordinate omogenee normalizzate nel sistema più generale di coordinate curvilinee $u = u_1$ e $v = u_2$: ecco lo scopo della presente ricerca. Da questa tra l'altro apparirà che su una superficie si può definire una geom. *metrica* (avente le assintotiche per linee di lunghezza nulla), che è *invariante per collineazioni*, e di cui (loc. cit.) vedremo applicazioni geometriche. Restano sistematicamente *escluse* le superficie *sviluppabili*, e quasi sempre anche le *rigate*, per cui la teoria è molto più semplice.

(1) Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1918.

(2) *Definizione proiettivo-differenziale di una superficie* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino 1914, vol. 49). Citerò questa Mem. con T. — *Invarianti proiettivo-differenziali*, ecc. (Annali di Matem., 25, Ser. 3ª). Citerò questa Mem. con A. — *Applicabilità proiettiva di due superficie* (Rendic. del Circ. Matem. di Palermo, 1916, tomo 41). Citerò questa Mem. con P. — Una ulteriore Nota di argomento affine, *Su alcune congruenze* W ecc., pubblicata nei Rend. della R. Acc. dei Lincei, non sarà citata nella presente Nota.

(3) Se più quantità sono definite a meno di un fattore, diremo *normare* o *normalizzare* queste quantità la scelta opportuna di tale fattore.

2. Preliminari analitici. — È indispensabile, per evitare molte difficoltà, ricorrere ad alcuni algoritmi di calcolo differenziale assoluto, che in parte credo nuovi.

Se g è una forma quadratica non degenere nelle ξ, η, diremo che un'altra forma ψ_n nelle ξ, η è *coniugata* di g, se, scritta la g sotto forma di prodotto $(a\xi + b\eta)(l\xi + m\eta)$, la forma ψ_n è del tipo $\lambda(a\xi + b\eta)^n + \mu(l\xi + m\eta)^n$, ove λ, μ non dipendono da ξ, η [1]. *Essa individua a sua volta la forma* $\overline{\psi}_n = \lambda(a\xi + b\eta)^n - \mu(l\xi + m\eta)^n$. Se $n = 3$, la ψ_3 è *coniugata* alla g, se ha lo Hessiano proporzionale a g; la $\overline{\psi}_3$ è il covariante cubico di ψ_3.

Una forma φ_n qualsiasi si può scrivere in uno e in un solo modo come uguale a $\psi_n + \varphi_{n-2}\, g$, ove ψ_n è *coniugata* a g, e φ_{n-2} è una forma di grado $n - 2$. Diremo ψ_n il *resto*, φ_{n-2} il *quoziente* ottenuti dividendo (*covariantemente*) la φ_n per g. Dividendo di nuovo φ_{n-2} per g e così continuando, si ha che ogni forma φ_n si può scrivere nella forma

$$\varphi_n = \psi_n + \psi_{n-2}\, g + \psi_{n-4}\, g^2 + \psi_{n-6}\, g^3 + \cdots \tag{1}$$

ove le ψ_n sono coniugate alla g.

Queste locuzioni si conserveranno anche per forme *differenziali*, quando sia $\xi = du$, $\eta = dv$, $g = a_{11}\, du^2 + 2\, a_{12}\, du\, dv + a_{22}\, dv^2$ con $A = a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$. Porremo $u = u_1$, $v = u_2$.

Se x è una funzione di u, v, con $x_r, x_{rs}, x_{rst} \ldots$ indicheremo le derivate *covarianti* della x rispetto alla forma g. Con $x^{(r)} = A_{r1}\, x_1 + A_{r2}\, x_2$ (ove A_{rs} è il complemento, diviso per A, del termine a_{rs}) indichiamo le così dette derivate prime *controvarianti* della x. Formano pure sistemi *controvarianti* le seguenti espressioni, che chiameremo pertanto *differenziali controvarianti*:

$$\left\{ \begin{aligned} &\delta u_i = du_i \;;\; \delta^2 u_i = d^2 u_i + \sum_{r,s} \binom{rs}{i} du_r\, du_s \\ &\delta^3 u_i = d(\delta^2 u_i) + \sum_{r,s} \binom{rs}{i} du_r\, \delta^2 u_s \end{aligned} \right. \tag{2}$$

dove con $\binom{rs}{i}$ sono indicati i simboli di Christoffel di seconda specie per la forma g. Per ogni funzione x delle u, v è poi:

$$d^2 x = \sum x_r\, \delta^2 u_r + D_2 x \quad \text{ove} \quad D_2 x = \sum_{r,s} x_{rs}\, du_r\, du_s \tag{3}$$

$$d^3 x = \sum x_r\, \delta^3 u_r + 3 \sum x_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s + D_3 x \quad \text{ove} \quad D_3 x = \sum_{r,s,t} x_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t . \tag{3$_{bis}$}$$

[1] Ciò si può enunciare (Segre) dicendo anche che i punti, per cui $\psi_n = 0$, sono trasformati l'uno nell'altro da una proiettività ciclica di ordine n, che lascia fissi i due punti (distinti per ipotesi) in cui la g è nulla.

Ricordando poi che

$$(4)\qquad d \log \sqrt{A} = \left[\binom{11}{1} + \binom{12}{2}\right] du + \left[\binom{22}{2} + \binom{12}{1}\right] dv$$

si trova che

$$(5)\qquad d[\sqrt{A}\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u)] = \sqrt{A}\,(du\,\delta^3 v - dv\,\delta^3 u)$$

Diremo *intrinseca* un'espressione, il cui significato è indipendente dalla particolare scelta delle linee coordinate u, v; tali sono le quantità che figurano nei due membri di (4); tali sono $D_2 x$, $D_3 x$, ecc.

Se g ha coefficienti costanti. le derivate covarianti e i differenziali controvarianti si riducono alle derivate e ai differenziali ordinarii.

Se b_{rs} formano un sistema covariante, e b_{rst} ne è il sistema derivato covariante, allora (anche se b_{rst} non è simmetrico) la forma $\sum b_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t$ si dirà la derivata covariante di $\varphi = \sum b_{rs}\, du_r\, du_s$, e si indicherà con $\delta\varphi$. Vale l'identità:

$$(6)\qquad d\varphi - \delta\varphi = 2 \sum b_{rs}\, du_r\, d^2 u_s .$$

3. Elemento lineare proiettivo di una superficie. — Con x, y, z, t indicheremo coordinate omogenee di un suo punto, con g la precedente forma quadratica *scelta ad arbitrio*. Con (x, x_1, x_2, x_{11}) indicherò il determinante, la cui prima riga è formata dalle quantità scritte in parentesi, e le altre tre righe se ne deducono sostituendo y, z, t alla x. Con notazioni *analoghe* indichiamo determinanti *analoghi*. Sono *intrinseche le forme*

$$(7)\qquad F_2 = \frac{1}{\sqrt{A}}(x, x_1, x_2, d^2 x) = \frac{1}{\sqrt{A}}(x, x_1, x_2, D_2 x)$$

$$(8)\qquad \Phi_3 = \frac{1}{\sqrt{A}}(x, x_1, x_2, d^3 x) =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{A}}(x, x_1, x_2, \sum x_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s) + \frac{1}{\sqrt{A}}(x, x_1, x_2, D_3 x)$$

di cui la seconda ha l'inconveniente di contenere i differenziali *secondi*. Per ovviare a questo, si osservi che in virtù della (6)

$$(9)\qquad dF_2 = \frac{2}{\sqrt{A}}(x, x_1, x_2, \sum x_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s) + \delta F_2$$

donde, derivando effettivamente la (7) e ricordando (4), si trae:

$$(10)\qquad \delta F_2 = \frac{1}{\sqrt{A}}(x, x_1, x_2, D_3 x) -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{A}}(x, dx, x_{11}\, du + x_{12}\, dv, x_{12}\, du + x_{22}\, dv),$$

Se ne deduce che (indicato con ∇ il discriminante di F_2)

$$
\text{(11)} \qquad F_3 = -3d\,F_2 + 2\Phi_3 + \frac{3}{4}F_2\,d\log\frac{\nabla}{A} =
$$

$$
= -3\delta F_2 + \frac{2}{\sqrt{A}}(x\,,x_1\,,x_2\,,D_3x) + \frac{3}{4}F_2\,d\log\frac{\nabla}{A}
$$

è pure una forma *intrinseca* del *primo ordine* (e terzo grado). *La* $F_2 = 0$ *definisce le assintotiche; la* $F_3 = 0$ *le linee di Darboux-Segre* (cfr. i seguenti risultati con i miei lavori cit., ove si dànno altri significati di F_3). È facile riconoscere che:

Se alla forma g *sostituiamo un'altra forma* g' *di discriminante* A', *e se moltiplichiamo le coordinate omogenee per uno stesso fattore* $\varrho = \varrho(u,v)$, *le forme* F_2, F_3 *restano moltiplicate per lo stesso fattore* $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A'}}\varrho^4$.

La forma F_3 *è coniugata* ad F_2 (cioè ha lo Hessiano proporzionale ad F_2) (1). Per *normare* in modo *intrinseco* le forme F_2, F_3 (che abbiamo ora riconosciuto determinate a meno di uno stesso fattore) poniamo $\varphi_r = \lambda F_r$ per $r = 1, 2$, scegliendo λ in modo che *il discriminante di* F_3 *sia uguale* (*a meno di un fattore numerico da prefissarsi a piacere*) *al cubo del discriminante di* F_2. *Le forme* φ_2, φ_3 *avranno anch'esse significato intrinseco.*

Vale poi il teorema (cfr. P): *Condizione necessaria e sufficiente affinchè due superficie abbiano comuni le forme* φ_2, φ_3 *è che esse siano proiettivamente applicabili.* Cosicchè l'aver comuni le forme φ_2, φ_3 *è condizione necessaria, ma non sufficiente* affinchè le due superficie siano *collineari*. In particolare: *La geometria metrica definita su una superficie, quando si assuma la forma* φ_2 *come elemento lineare, si conserva per trasformazioni proiettive* (ed anche per *deformazioni proiettive*).

Caso metrico. Supposto g = elemento lineare di Gauss, supposto $t = 1$ ed x, y, z coordinate cartesiane ortogonali, $F_2 = D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2$ è la nota seconda forma di Gauss. Ricordando i ben noti valori delle x_{rs}, si deduce che l'ultimo termine della (10) è nullo. Poichè $\nabla : A = K$ = curvatura totale, sarà così:

(1) Per dimostrare questo teorema si assumano coordinate assintotiche, e la g a coeffic. costanti. Sarà $(x\,,x_1\,,x_2\,,x_{11}) = (x\,,x_1\,,x_2\,,x_{22}) = 0$ e quindi anche $(x\,,x_1\,,x_{11}\,,x_{22}) = 0$. Basterà provare per es. che il coefficiente di $du^2\,dv$ in F_3 è nullo, cioè che

$$
(x\,,x_2\,,x_{11}\,,x_{12}) - (x\,,x_1\,,x_2\,,x_{112}) + \frac{\partial}{\partial u}(x\,,x_1\,,x_2\,,x_{12}) = 0\,;
$$

ciò che è ben evidente.

$$(12)\quad F_3 = -\delta F_2 + \frac{3}{4} F_2\, d \log K \quad ; \quad \Phi_3 = \frac{3}{2}\, dF_2 - \frac{1}{2}\, \delta F_2 =$$
$$= \frac{3}{2}\, dF_2 + \frac{1}{2}\, F_3 - \frac{3}{8}\, F_2\, d \log K$$

in perfetto accordo con le formole di loc. cit.

Caso proiettivo. In questo caso è ovvio che la scelta più opportuna è data *dalla* $\varphi_2 = g$, *perchè* φ_2 *è invariante per collineazioni*; e *normare* poi le x, y, z, t in guisa che *ne risulti* $F_2 = \varphi_2$. Cosicchè $\delta F_2 = 0$ (perchè derivata covariante di F_2 rispetto a se stessa). Chiameremo *normali* le coordinate omogenee così normate; esse nella geometria *proiettiva* tengono il luogo delle coordinate *cartesiane* nella geometria *metrica*. Le coordinate *normali* di punti omologhi di due superficie collineari sono sempre legate da una trasformazione lineare intera *a coefficienti costanti, a determinate unità*. Ricordando che $\nabla = A$, che $\delta F_2 = 0$, si deduce che in coordinate *normali* valgono le formole seguenti di massima semplicità:

$$(13)\qquad \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{\nabla}}(x, x_1, x_2, D_2 x) = \frac{1}{\sqrt{\nabla}}(x, x_1, x_2, d^2 x)$$

$$(14)\quad \varphi_3 = \frac{2}{\sqrt{\nabla}}(x, x_1, x_2, D_3 x) \ ; \ 2\Phi_3 = 3\, d\varphi_2 + \varphi_3 \ ; \ \nabla = \text{discrim. di } \varphi_2 .$$

Indicheremo con H il discriminante dell'elemento lineare, con N *il rapporto di* φ_2 *alla seconda forma di Gauss*; il rapporto dei valori di (x, x_1, x_2, d^2x) secondo che si usino coordinate normali o cartesiane vale pertanto $\frac{\sqrt{\nabla}}{\sqrt{H}} \frac{\varphi_2}{F_2}$ (se F_2 è la seconda forma di Gauss) cioè vale $N^2 \sqrt{K}$.

Le coordinate normali si ottengono perciò moltiplicando le coordinate cartesiane $x, y, z, 1$ *per* ϱ, *ove* $\varrho^2 = N \sqrt[4]{K}$.

4. Per completare questi studî, è necessario premettere alcune altre nozioni analitiche. Indichiamo con φ_2, φ_3 due forme *coniugate covarianti*, una quadratica, una cubica. Se $x^{(u)}, x^{(v)}$ sono le derivate controvarianti di $x(u, v)$, la forma *polare* quadratica $-2P_2^{(x)}$ di $x^{(u)}, x^{(v)}$ rispetto a φ_3 è una forma *covariante* (che ora calcoleremo insieme alle forme seguenti in un caso notevole). Dividendo $\delta\varphi_3$ per φ_2 si trovi $\delta\varphi_3 = -2\varphi_4 + 3\varphi_2 g_2$ (con φ_4 coniugata di φ_2); sia φ_1 la forma (univocamente determinata) del primo ordine tale che $g_4 - \varphi_1 \varphi_3$ sia divisibile per φ_2. Le forme $\varphi_1, g_2, \varphi_4$ saranno nuove forme *covarianti*. Un'altra forma covariante $2g_3$ è la derivata covariante del prodotto ottenuto moltiplicando φ_2 per la sua curvatura; è pure covariante il resto Γ_2 ottenuto dividendo per φ_2 la forma $\frac{1}{2}\varphi_1^2 + \delta\varphi_1$. Infine, se t_2 è una nuova forma quadratica covariante coniugata di φ_2, il resto R_t ottenuto dividendo per g la forma $\delta t_2 + 2\varphi_1 t_2$ è una nuova forma

covariante coniugata di φ_2. Se noi scegliamo a linee coordinate quelle che annullano φ_2, e se è

$$\varphi_2 = 2\beta\gamma\, du\, \delta v \quad , \quad \varphi_3 = 2\beta\gamma\,(\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3) \quad , \quad t_2 = \mathrm{P}\, du^2 + \mathrm{Q}\, dv^2$$

allora:

$$(15) \quad \varphi_4 = \beta^2\gamma \frac{\partial \log(\beta\gamma^2)}{\partial u} du^4 + \gamma^2\beta \frac{\partial \log(\gamma\beta^2)}{\partial v} dv^4$$

$$(16) \quad g_2 = \beta \frac{\partial \log(\gamma\beta^2)}{\partial v} du^2 + \gamma \frac{\partial \log(\beta\gamma^2)}{\partial u} dv^2$$

$$(17) \quad \varphi_1 = \frac{\partial \log(\beta\gamma^2)}{\partial u} du + \frac{\partial \log(\gamma\beta^2)}{\partial v} dv$$

$$(18) \quad g_3 = \left(\frac{\partial^3 \log \beta\gamma}{\partial u^2\, \partial v} - \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u} \frac{\partial^2 \log \beta\gamma}{\partial u\, \partial v}\right) du^2\, dv + \\ + \left(\frac{\partial^3 \log \beta\gamma}{\partial u\, \partial v^2} - \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v} \frac{\partial^2 \log \beta\gamma}{\partial u\, \partial v}\right) du\, dv^2$$

$$(19) \quad \Gamma_2 = \left(\frac{\partial^2 \log \beta\gamma^2}{\partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial \log \beta}{\partial u} \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u}\right) du^2 + \\ + \left(\frac{\partial^2 \log \beta\gamma^2}{\partial v^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial \log \gamma}{\partial v} \frac{\partial^2 \log \gamma\beta^2}{\partial v}\right) dv^2$$

$$(20) \quad \mathrm{P}_2^{(x)} = -(\beta^2\gamma x^{(1)}\, du^2 + \beta\gamma^2 x^{(2)}\, dv^2) = (\beta x_2\, du^2 + \gamma x_1\, dv^2)$$

$$(21) \quad \mathrm{R}_t = \left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial u} + 2\mathrm{P} \frac{\partial \log \gamma}{\partial u}\right) du^3 + \left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial v} + 2\mathrm{Q} \frac{\partial \log \beta}{\partial v}\right) dv^3 .$$

5. Sezioni piane. — Le forme φ_2, φ_3 non bastano sempre a caratterizzare una superficie a meno di collineazioni, come proveremo più avanti. Per finire di determinare completamente la superficie nel gruppo proiettivo, basta (cfr. la T) dare $\mathrm{S} = (x, dx, d^2x, d^3x)$; la quale, uguagliata a zero, definisce le sezioni piane. Scelta *ad arbitrio* la g, si trova per le (3), (7), (8) che:

$$(22) \quad \mathrm{S} = (x, dx, \mathrm{D}_2 x, \sum x_r\, \delta^3 u_r) + 3\,(x, dx, \sum x_r\, \delta^2 u_r, \sum x_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s) + \\ + 3\,(x, dx, \mathrm{D}_2 x, \sum x_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s + \\ + (x, dx, \sum x_r\, \delta^2 u_r, \mathrm{D}_3 x) + (x, \mathrm{D}x, \mathrm{D}_2 x, \mathrm{D}_3 x) = \\ = -\sqrt{\mathrm{A}}\,(du\, \delta^3 v - dv\, \delta^3 u)\, \mathrm{F}_2 + \sqrt{\mathrm{A}}\,(du\, \delta^2 v - dv\, \delta^2 u) \times \\ \times [\Phi_3 + 3\,(x, dx, x_{11}\, du + x_{12}\, dv, x_{21}\, du + x_{22}\, dv)] + (x, \mathrm{D}x, \mathrm{D}_2 x, \mathrm{D}_3 x).$$

Ogni termine di (22) *è intrinseco, e si può studiare separatamente*: ecco il grande vantaggio di avere usato simboli di calcolo assoluto, che hanno qui evitato assai gravi difficoltà!

Indicheremo con S_m il valore metrico S (corrispondente al caso che si usino coordinate cartesiane, che g sia l'elemento lineare di Gauss, di cui indichiamo con H il discriminante, e che infine F_2 sia la seconda forma di Gauss: cfr. § 3). Sarà

$$(22)_{bis} \qquad S_m = -d\left[\sqrt{H}\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u)\right] +$$
$$+ \sqrt{H}\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u)\left(\frac{3}{2}\,dF_2 + \frac{1}{2}\,F_3 - \frac{3}{8}\,F_2 d\log K\right) + (x, Dx, D_2x, D_3x).$$

Confrontando il solo primo termine coi risultati di T, si trova:

$$(23) \qquad S_m = \frac{1}{T}\,\frac{1}{R^3}\,ds^6$$

(R, T raggi di curvatura e torsione).

Si noti che $\sqrt{H}\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u) = \frac{ds^3}{R_g^3}$ (R_g raggio di curvatura geodetica). Quindi per le *geodetiche* S_m si riduce al suo *ultimo termine*; *il quale* $\left(\text{pertanto vale } \frac{1}{T}\,\frac{1}{R^3}\,ds^6 \text{ calcolato lungo la geodetica tangente, cioè}\right)$ *vale* $\frac{1}{T_g}\,\frac{1}{R_n^3}\,ds^6$ (T_g, R_n raggi di torsione geod. e di curvatura normale). Per mezzo dei risultati ottenuti in (A) per le forme F_2, F_3, dalla $(22)_{bis}$ si possono trarre svariati significati metrici di S_m.

Matematica. — *Alcune formule sulle superficie applicabili.* Nota di MATTEO BOTTASSO, presentata dal Corrispondente R. MARCOLONGO [1].

Alle formule sulla flessione d'una superficie inestendibile comunicate in una mia Nota [2], credo utile aggiungerne alcune altre, non meno notevoli, delle quali spero poter mostrare fra breve l'importanza nella teoria dell'applicabilità delle superficie. Queste nuove formule esprimono, in modo esplicito, l'omografia $d\lambda$ differenziale dell'isomeria vettoriale λ, che muta gli elementi lineari (dP) uscenti dal punto generico P, di una superficie S, nei corrispondenti elementi (dP_0) uscenti dal punto P_0 (omologo di P) di

[1] Pervenuta all'Accademia il 4 luglio 1918.

[2] M. Bottasso, *Sulla flessione delle superficie inestendibili* (Rend. R. Accad. dei Lincei, vol. XXIV (5ª), 2° sem. 1915, pp. 174-182).