ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

Geometria. — *Il problema della deformazione proiettiva delle ipersuperficie. Le varietà a un qualsiasi numero di dimensioni.* Nota del Corrisp. GUIDO FUBINI [1].

Siano $F_2 = \Sigma a_{ij}\, du_i\, du_j$ ed $F_3 = \Sigma \Delta_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t$ le due forme [2] costituenti l'elemento lineare proiettivo di una ipersuperficie V_n contenuta in uno spazio lineare S_{n+1} ad $n+1$ dimensioni. Sia A_{ij} il complemento algebrico di a_{ij} nel discriminante Δ di F_2, diviso per Δ, che supponiamo diverso da zero. Le $n+2$ coordinate omogenee $x, y, z, \ldots, t$ di un punto di V_n soddisferanno (indicando con x_r, x_{rs} ecc. derivate covarianti secondo la forma F_2) alle equazioni:

$$(1) \qquad x_{rs} = \sum_{h,k} \Delta_{rsh} A_{hk}\, x_k + a_{rs} X + c_{rs}\, x \quad \text{(e analoghe in } y, z, \ldots)$$

$$(2) \qquad X = \frac{1}{n} \Sigma A_{rs}\, x_{rs} = \frac{1}{n} \Delta_2 x \quad \text{e analoghe}$$

ove

$$(3) \qquad \sum_{r,s} A_{rs}\, \Delta_{rst} = 0 \qquad (t = 1, 2, \ldots, n).$$

Le c_{rs} sono i coefficienti della terza forma fondamentale $f_2 = \Sigma c_{rs}\, du_r\, du_s$, e soddisfano alla

$$(4) \qquad \sum_{r,s} A_{rs}\, c_{rs} = 0, \quad \text{ossia} \quad \sum_h C_{hh} = 0, \quad \text{ove} \quad C_{rs} = \sum_h c_{rh} A_{hs}.$$

Le F_2, F_3 sono determinate a meno di un fattore comune: scelte F_2, F_3, le $x, y, \ldots$ sono completamente determinate: anzi nel caso generale (caso *normale*) si potrebbe togliere ogni indeterminazione alle F_2, F_3 (e quindi anche ad f_2).

Indicati con (st, rh) i simboli di Riemann per F_2, il modo per noi migliore di scrivere le condizioni di integrabilità è di scrivere

$$(5) \qquad \sum_{\rho} A_{r\rho} (x_{\rho st} - x_{\rho ts}) = - \sum_{h,k,\rho} (st, \rho h)\, A_{r\rho} A_{hk}\, x_k$$

(identicamente nelle x, x_h, X), equazioni che sono combinazioni lineari di

[1] Pervenuta all'Accademia il 28 settembre 1918.

[2] Cfr. la mia Nota: *Nuovi studi sull'elemento proiettivo* ecc. (2° sem. 1918 di questi Rendiconti), dove si troveranno altre citazioni.

formole ben note di calcolo differenziale assoluto di Christoffel e Ricci. Derivando covariantemente (1), si deduce facilmente da (5) che le X_t sono combinazioni lineari delle x, x_r, come si può provare anche partendo da (2), (4). Quindi potremo porre, introducendo nuove incognite λ_t, l_{th}:

$$X_t = \lambda_t x + \sum_k L_{tk} x_k \quad \text{ove} \quad L_{tk} = \sum_h l_{th} A_{hk}. \tag{6}$$

Porremo anche $\eta_{rr} = 1$, $\eta_{rs} = 0$ per $r \neq s$ e

$$[st, rk] = \sum_{h,\rho} A_{kh} A_{r\rho} \times \tag{7}$$

$$\times [\Delta_{h\rho ts} - \Delta_{h\rho st} + (ts, \rho h) + \sum_{i,j} A_{ij} (\Delta_{\rho it} \Delta_{hjs} - \Delta_{\rho si} \Delta_{htj})] \text{ (1)}.$$

Uguagliando nei due membri di (5) i coefficienti di x_k e di x, si trova:

$$[st, rk] = \eta_{sr} L_{tk} - \eta_{tr} L_{sk} + \eta_{tk} C_{sr} - \eta_{sk} C_{tr} \tag{8}$$

$$\sum_\rho A_{r\rho} [c_{\rho st} - c_{\rho ts} + \sum_h (\Delta_{s\rho h} C_{th} - \Delta_{t\rho h} C_{sh})] + \eta_{rs} l_t - \eta_{rt} l_s = 0. \tag{9}$$

Infine, scrivendo che da (6) si deduce $X_{ts} = X_{st}$, si trova in modo simile:

$$l_{st} = l_{ts} \tag{10}$$

$$\lambda_t \eta_{tk} - \lambda_s \eta_{sk} + \sum_h A_{hk} (l_{hts} - l_{hst}) + \sum_{\rho,h} (L_{t\rho} \Delta_{\rho hs} - L_{s\rho} \Delta_{\rho ht}) A_{hk} = 0 \tag{11}$$

$$\lambda_{ts} + \sum_h C_{sh} l_{th} = \lambda_{st} + \sum_h C_{th} \lambda_{sh}. \quad \text{(Si noti che } \sum_h C_{sh} l_{th} = \sum_h c_{sh} L_{th}). \tag{12}$$

Le (3), (4), (8), (9), (10), (11), (12) sono *le condizioni di integrabilità o compatibilità* delle (1) [e (6)]; esse per $s = t$ si riducono a identità. Studiamole per $n > 2$ (2), quando lo spazio ambiente ha $n + 1 \geq 4$ dimensioni.

(1) È $[st, rk] = -[ts, rk]$; $[st, rk] + [st, kr] = \sum_{h,\rho} A_{r\rho} A_{kh} (\Delta_{h\rho ts} - \Delta_{h\rho st})$;

$[st, sk] - [ts, ks] = \sum_{h,\rho} A_{hk} A_{\rho s} \Delta_{h\rho ts}$, che si annulla se $t = k$ in virtù delle (3).

(2) Nel caso $n = 2$ non si possono dare 3 indici s, k, t *differenti*, nè perciò determinare le C_{tk} dalle (13). Nè le equazioni che dànno le $C_{ss} + L_{tt}$ insieme alla ΣC_{ss} bastano a determinare le C_{ss}. Il caso $n = 2$ nelle mie Note cit. è trattato col metodo più semplice possibile. La potenza dei nostri metodi si vedrà confrontando p. es. con le condizioni di integrabilità negli studî di Wilczynski (a cui principalmente è dedicata la Mem. del tomo 10 delle Trans. of the Amer. Math. Society).

Un metodo di calcolo, *assai più complicato*, che nel caso $n = 2$ può servire a stabilire il contatto tra le equazioni classiche (che userò con le notazioni delle *Lezioni di Geometria differenziale* del prof. L. Bianchi) e quelle di Wilczynski è il seguente. Si

Dalle (8) supponendo successivamente $r \neq s, t$ e $k \neq s, t$, oppure $r = s$, ma $k \neq s, t$, oppure $k = s$, ma $r \neq s, t$, oppure $r = k = s \neq t$,

---

usino coordinate *proiettive* non omogenee x, y, z ed $1 = t$. Una superficie si può definire dando equazioni del tipo:

$$\frac{x_{uu} - 2(\mu + M)\, x_u}{D} = \frac{x_{uv} - \nu x_u - \mu x_v}{D'} = \frac{x_{vv} - 2(\nu + N)\, x_v}{D''} \quad \text{(e analoghe in } y, z, t).$$

Chiameremo ξ il valore di questi rapporti; $\eta, \zeta, \tau = 0$ i valori analoghi ottenuti scrivendo y, z, t al posto di x. Definiamo due quantità h, k in guisa che:

$$D_v - D'_u + 2M D' = D(\nu - k D'' - h D') - D'(\mu - h D - k D')$$
$$D''_u - D'_v + 2N D' = - D'(\nu - k D'' - h D') + D''(\mu - h D - k D').$$

Poniamo

$$X = \xi - h x_u - k x_v \quad \text{e analoghe;} \quad \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = k D, \quad \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = h D'', \quad \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} = h D + 2(\mu + M),$$
$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = k D' + \mu \; ; \quad \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} = k D'' + 2(\nu + N) \; ; \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = h D' + \nu$$

$$\{11, 21\} = D'(2\mu h + 2M h + h_u + \nu k) - D(h\nu + h_v) - \\ - (2\mu_v + 2M_v - \nu_u - \mu\nu) = - A_{21}(DD'' - D'^2)$$
$$\{21, 21\} = - D'(h\nu + h_v) + D''(\nu k + h_u + 2\mu' h) + 2N\nu + \nu^2 - \nu_v = A_{11}(DD'' - D'^2)$$
$$\{12, 12\} = - D'(k\mu + k_u) + D(\mu h + k_v + 2\nu k + 2N k) + \\ + (2M\mu + \mu^2 - \mu_u) = A_{22}(DD'' - D'^2)$$
$$\{22, 12\} = D'(2\nu k + 2N k + k_v + \mu h) - D''(k\mu + k_u) - \\ - (2\nu_u + 2N_u - \mu_v - \mu\nu) = - A_{12}(DD'' - D'^2)$$

notazioni, che per ora potrebbero sembrare *curiose*. Le condizioni d'integrabilità delle equazioni in x dànno:

$$(DD'' - D'^2)\, X_u = (\{11, 21\} D' - \{21, 21\} D)\, x_u + (\{22\ 12\} D - D' \{12, 12\})\, x_v$$
$$(DD'' - D'^2)\, X_v = (\{11, 21\} D'' - \{21, 21\} D')\, x_u + (\{22, 12\} D' - D'' \{12, 12\})\, x_v$$
$$\text{(e analoghe in } Y, Z)$$

che, come condizioni di integrabilità, dànno in conclusione:

$$A_{12} = A_{21} \; ; \; D\left(\frac{\partial A_{11}}{\partial v} + 2A_{12}\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} + 2A_{11}\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}\right) + \\ + D''\left(-\frac{\partial A_{12}}{\partial u} - A_{22}\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} - A_{12}\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} - A_{12}\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} - A_{11}\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}\right) + \\ + D'\left(-\frac{\partial A_{11}}{\partial u} + \frac{\partial A_{12}}{\partial v} - 2A_{11}\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} + A_{11}\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} + A_{22}\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} + A_{12}\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} - A_{12}\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0$$

e l'analoga, ottenuta cambiando 1 con 2, u con v.

Queste sono in fondo le equazioni più semplici, che si possano considerare equivalenti a quelle di Wilczinsky. Se si considerano $D du^2 + 2D' du\, dv + D'' dv^2$ come la seconda forma di Gauss, e le quantità tra $\{\ \}$ come i simboli a 3 e 4 indici relativi all'elemento lineare di Gauss, le equazioni, che ci hanno servito a determinare h, k sono le ordinarie equazioni di Codazzi; e le altre equazioni sono conseguenza ben nota di equazioni classiche. Si noti (cfr. la mia Nota in corso di stampa negli Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino) che dare le D, D', D'', a meno di un fattore comune, e dare

oppure $r = s \neq k = t$, si trae:

$$(13)\quad \begin{cases} [st, rk] = 0 \quad (r \neq s, t) \quad (k \neq s, t) \quad \text{(per } s = t \text{ si ha un'identità)} \\ L_{tk} = [st, sk]\,;\ C_{tk} = [ts, ks]\,;\ L_{tk} - C_{tk} = [kt, kk]\,;\ (s \neq t \neq k \neq s) \\ [st, st] = L_{tt} + C_{ss} \quad (s \neq t) \quad ; \quad \sum_h C_{hh} = 0\,. \end{cases}$$

Le ultime due equazioni dànno tutte le C_{ss}, L_{tt}; le precedenti dànno le C_{st}, L_{st} per $s \neq t$: cioè risultano determinate sia le c, che le l.

Ne deduciamo intanto: *Se $n > 2$ ogni ipersuperficie* (a più che due dimensioni) *è indeformabile proiettivamente, almeno nella nostra attuale ipotesi $\Delta \neq 0$ (che cioè il cono delle direzioni assintotiche non possegga generatrici doppie)*. Cioè le sole forme F_2, F_3 (elemento lineare), permettendo di determinare le c_{rs}, definiscono completamente la V_n. *Nè le forme F_2, F_3 si possono scegliere arbitrariamente. Le relazioni tra queste forme sono quelle che si deducono da* (13), *eliminando le C_{st}, L_{st}* (¹), *quelle che si ottengono scrivendo che le λ definite da* (11) *soddisfano a* (12), *e infine quelle che si ottengono scrivendo che le*

$$l_{tk} = \sum_h L_{th} A_{hk}\ ,\ c_{tk} = \sum_h L_{th} A_{hk}$$

formano due sistemi simmetrici (non mutano, scambiando t, k). Anzi queste formole paiono le più adatte a studiare il problema: *Determinare le ipersuperficie con data forma F_2, cioè le ipersuperficie, per cui è assegnata l'equazione $F_2 = 0$ delle assintotiche* (²).

---

le M, N equivale a dare l'elemento lineare proiettivo della superficie. (Moltiplicando D, D′, D″ per uno stesso fattore, le equazioni per x, y, z non mutano; cambiano però le h, k; l'indeterminazione di questo fattore è uno svantaggio, che sembra difficile eliminare in modo indipendente dalla scelta delle coordinate u, v).

(¹) Cioè $[st, sk] = [ht, hk]$; $[ts, ks] = [th, kh]$; $[st, ss] = [ht, hs] - [th, sh]$ (s, t, h, k, indici distinti); $[st, st] - [ht, ht] = [sk, sk] - [hk, hk]$ ($s \neq t, k$; $h \neq t, k$). Queste si possono semplificare ricordando le identità tra le $[rs, hk]$.

(²) In forma metrica il problema si enuncia: *Trovare l'elemento lineare di Gauss di una ipersuperficie, per cui è data, a meno di un fattore, la seconda forma fondamentale.* Le equazioni precedenti (per la ricerca di F_3) sono però forse più semplici di quelle cui condurrebbero le note formole di Gauss e di Codazzi, sia perchè si può prescindere dal fattore ignoto, sia perchè vi compariscono i simboli di Riemann per *la forma data* F_2, anzichè per *l'elemento lineare di Gauss incognito*, sia infine perchè l'introduzione di questo elemento lineare (che è un ente *non proiettivo* e quindi *estraneo al problema*) non può che portare complicazioni. Del resto per chi ricordi che F_3 è una certa combinazione della seconda forma di Gauss, e della sua derivata covariante rispetto all'elemento lineare di Gauss, è evidente che il presente metodo equivale in fondo a usare come incognite tali derivate covarianti dei coefficienti della seconda forma di Gauss.

Si noti che, *se le* (1) *formano un sistema integrabile completamente esse definiscono appunto una ipersuperficie, di cui* F_2 *ed* F_3 *sono l'elemento lineare* [1].

Osservazione 1ª. — Assunte come coordinate *proiettive non omogenee* le $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \ldots, \frac{t}{x}$, indicate le prime con $u_1, u_2, \ldots, u_n$, l'ultima con w, indicate con $w_r, w_{rs}, \ldots$ derivate *ordinarie* (cioè non covarianti), le forme F_2, F_3 di V_n sono proporzionali a $\Sigma w_{rs}\, du_r\, du_s$ ed a

$$-\Sigma w_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t + \frac{3}{n+2}\Sigma w_{rs}\, du_r\, du_s\, d\log \Delta,$$

ove Δ è il discriminante della prima. Se ne deduce *una nuova dimostrazione proiettiva che* F_3 *è apolare ad* F_2, *cioè che valgono le* (3). Se poi l'origine $u_i = w = 0$ è un punto O di V_n, in cui $w = 0$ è l'iperpiano tangente, e se w^0_{rs}, w^0_{rst} sono i valori in O delle w_{rs}, w_{rst}, allora $hw^2 + 2(1+p_1)\,w - \Sigma w^0_{rs}\, u_r\, u_s = 0$ è l'equazione di una quadrica osculatrice in O (la cui intersezione con V_n ha un punto triplo in O). ($h =$ cost.; $p_1 =$ forma di primo grado nelle u). Il cono cubico tangente alla intersezione di V_n con la quadrica è $\Sigma w^0_{rst}\, u_r\, u_s\, u_t + 3p_1\, \Sigma w^0_{rs}\, u_r u_s = w = 0$. Quindi: *Come* $F_2 = 0$ *è l'equazione del cono tangente all'intersezione di* V_n *con l'iperpiano tangente, così* $F_3 = 0$ *è l'equazione dell'unico cono apolare al cono* $F_2 = 0$, *che sia intersezione di* V_n *con una quadrica osculatrice.*

Osservazione 2ª. — Definiamo le coordinate $\xi, \eta, \ldots$ di iperpiano tangente in guisa che $S\xi x = S\xi x_i = 0$, $S\xi X = 1$. (Con S indico una somma i cui addendi si ottengono dal primo sostituendo ad x, ξ le y, η, le z, ζ ecc.). Sarà $a_{rs} = S\xi x_{rs} = -S\xi_r x_s = Sx\xi_{rs}$. Poniamo $\Xi = \Sigma A_{rs}\xi_{rs} : n$,

[1] Si scelgano infatti i valori iniziali delle x, x_r, X (e analoghe $y, y_r, \ldots$), che sono arbitrarî, in guisa che nel punto iniziale sia $D = (x, x_1, x_2, \ldots, x_n, X) = \sqrt{\Delta}$. Il determinante D del primo membro ha la prima riga formata dagli elementi scritti tra ( ); le altre righe se ne deducono sostituendo ordinatamente alle x, X le y, Y, le z, Z, ecc. Ricordando che per (1) sia dX che $x_{rs} - a_{rs}X$ sono combinazioni lineari delle x, x_r e che (indicando con $\begin{pmatrix} ir \\ q \end{pmatrix}$ i simboli di Christoffel di 2ª specie per F_2) è

$$dx_i = \sum_r \left[x_{ir} + \begin{pmatrix} ir \\ q \end{pmatrix} x_q \right] du_r,$$

si trova $d\log D = \Sigma \begin{pmatrix} ir \\ i \end{pmatrix} du_r = d\log\sqrt{\Delta}$. Perciò D e $\sqrt{\Delta}$, uguali nel punto iniziale, saranno identicamente uguali. E quindi da (1) si deduce appunto:

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}}(x, x_1, \ldots, x_n, x_{rs}) = a_{rs} \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{rst}) = \Delta_{rst}.$$

e analoghe (così sono definite le quantità duali di $X, Y, \ldots$). Con considerazioni duali delle precedenti si prova che $Sx\Xi = 1$ e che $Sx\Xi_i = 0$, e quindi anche $S\Xi x_i = 0$. Le $\xi, \eta, \ldots$ *sono i complementi dell'ultima colonna di* $(x, x_1, \ldots, x_n, X)$ *divisi per* $\sqrt{\Delta}$; similmente *le* $x, y, \ldots$ *sono i complementi dell'ultima colonna di* $(\xi, \xi_1, \ldots, \xi_n, \Xi)$ *divisi per* $\sqrt{\Delta}$ *e moltiplicati per un fattore* λ, *che ora determineremo.* Il prodotto dei due ultimi determinanti citati vale, per le precedenti identità $(-1)^{n+1}\Delta$; *cioè* $1/\lambda\, S\xi X\, Sx\Xi = (-1)^{n+1}$, *donde* $\lambda = (-1)^{n+1}$. Valgono poi le

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}}(\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \xi_{rs}) = (-1)^{n+1} a_{rs};$$

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}}(\xi, \xi_1, \ldots, \xi_n, \xi_{rst}) = (-1)^{n+1} Sx\xi_{rst} = (-1)^n \Delta_{rst};$$

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}}(\xi, \xi_1, \ldots, \xi_n, \Xi) = (-1)^{n+1};$$

e pertanto:

$$(1)_{bis} \qquad \xi_{rs} = -\Sigma \Delta_{rsh} A_{hk} \xi_k + a_{rs}\Xi + \gamma_{rs} \cdot \xi .$$

Queste equazioni sono dello stesso tipo di (1); si vede che, passando dalle x alle ξ, basta cambiare il segno delle Δ_{rsh}. Per le γ_{rs} (il cui studio merita di essere approfondito), cioè per la forma $\Sigma \gamma_{rs}\, du_r\, du_s$ si possono ripetere le considerazioni svolte più sopra per le c_{rs} e per la forma $\Sigma c_{rs}\, du_r\, du_s$.

Il caso $\Delta = 0$ (*cono assintotico con generatrici doppie*) *è eccezionale* già per la stessa definizione qui usata di F_3. Proveremo che in tal caso la V_n *è inviluppo di* ∞^r *iperpiani con* $r < n$; da ciò l'importanza dello studio di tale caso eccezionale, perchè *permette di estendere le nostre ricerche alle varietà* V_r *con* $r < n$; *la varietà duale di una tale* V_r *è appunto una* V_n *del tipo precedente.* Scelte a linee u_n un sistema di linee tangenti in ogni punto *alla*, oppure *ad una* generatrice doppia del cono assintotico, oltre alle $S\xi x = S\xi x_i = 0$ varranno le $S\xi_n x = S\xi_n x_i = 0$; e, poichè V_n è luogo *proprio* di ∞^n punti, le ξ_n saranno perciò proporzionali alle ξ, ossia, dividendo per un fattore, le ξ saranno indipendenti da u_n; gli iperpiani tangenti dipenderanno da $r \leq n-1$ parametri $u_1, u_2, \ldots, u_r$. (Nel loc. cit. è stato studiato il caso $r = 1$). Supposto dunque che gli iperpiani tangenti siano *proprio* ∞^r, siano $x^{(h)}, y^{(h)}, \ldots$ $(h = 0, 1, 2, \ldots, \varrho;\ \varrho = n - r)$ $\varrho + 1$ sistemi di soluzioni indipendenti (funzioni delle sole $u_1, u_2, \ldots, u_r$) delle equazioni $S\xi x = S\xi_i x = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Potremo supporre $x^{(0)} = 1$, $x^{(\alpha)} = 0$ per $\alpha > 0$. Poichè i punti di V_n soddisfano a tali equa-

zioni, V_n sarà luogo del punto $x = x^{(0)} + \sum_1^{\varrho} v_h x^{(h)}$ (e analoghe in $y, z, \ldots$) ove le v insieme alle u formano appunto un sistema di n variabili coordinate. La V_n è formata da ∞^r spazii S_ϱ lineari; le $V_r^{(\alpha)}$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, \varrho)$ (luogo del punto $x^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}, \ldots$) sono varietà *generiche* ad r dimensioni contenute in V_n (che, se $\alpha > 0$, sono contenute anche nell'iperpiano *generico* $x = 0$). Un punto *generico* di una di queste varietà si può supporre *generico* anche per V_n; la quale avrà in esso pertanto un iperpiano tangente ben determinato. Le equazioni $S\xi x^{(h)} = 0$ $(h = 0, 1, \ldots, \varrho)$ insieme alle $S\xi x_i^{(\alpha)} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ determinano quindi, *qualunque sia* α (da 0 a ϱ), gli stessi valori per le $\xi, \eta \ldots$ Quindi, invece di dire che le $x^{(h)}$ sono soluzioni delle stesse equazioni $S\xi x = S\xi_i x = 0$, possiamo dire che le $x_i^{(\alpha)}$ sono combinazioni lineari delle $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(\varrho)}, x_1^{(\beta)}, x_2^{(\beta)}, \ldots, x_r^{(\beta)}$ (e analoghe in $y, z, \ldots$) qualunque siano α, β (da 0 a ϱ). (Cioè punti omologhi delle V_α sono posti in uno stesso iperpiano tangente alle V_α). Tali equazioni si possono scrivere:

$$x_i^{(0)} = \sum_{j=1}^{r} \beta_{ij}^{(\alpha)} x_j^{(\alpha)} + \sum_{\varrho=1}^{\varrho} c_l^{(\alpha)} x^{(l)} \tag{14}$$

(e analoghe in $y, z, \ldots$) (per ogni α da 1 a ϱ).

Si è posto $c_0^{(\alpha)} = 1$, perchè tale equazione è soddisfatta per $x^{(0)} = 1$, $x^{(\alpha)} = 0$ per $\alpha > 0$. Tali equazioni, dovendo essere risolubili rispetto alle $x_j^{(\alpha)}$, il determinante delle $\beta_{ij}^{(\alpha)}$ è diverso da zero.

Senza più oltre occuparci del caso generale, supponiamo, per esempio, $\varrho = 1$, ponendo $y^{(1)} = \overline{y}, z^{(1)} = \overline{z}, \ldots$ (È $\overline{x} = x^{(1)} = 0$). Poichè moltiplicare $\overline{y}, \overline{z}, \ldots$ per un fattore, equivale a moltiplicare v_1 per un fattore, potremo considerare $\overline{y}, \overline{z}, \ldots$ come coordinate omogenee di un punto in uno spazio lineare S_n; il quale punto descriverà una ipersuperficie W_{n-1}, per la quale, conservando le precedenti notazioni, indicheremo l'elemento lineare con $\overline{\varphi}_2 = \Sigma a_{ts} du_t du_s$, e $\overline{\varphi}_3 = \Sigma \Delta_{ijh} du_i du_j du_h$ $(s, t, i, j, h = 1, 2, \ldots, n-1)$. Scriveremo (14) nella forma:

$$y_s^{(0)} = \sum_{i,h} b_{si} A_{ih} \overline{y}_h + \lambda_s \overline{y} \quad \text{e analoghe in } z, \ldots, t. \tag{15}$$

Posto $D_{sti} = b_{sti} + \lambda_s a_{ti} + \sum_{h,k} b_{sh} A_{hk} \Delta_{kti}$, si trova (derivando secondo φ_2) per (1):

$$y_{st}^{(0)} = \sum_{h,k} D_{sth} A_{hk} \overline{y}_k + b_{st} \overline{Y} + \left(\lambda_{st} + \sum_{k,h} b_{sh} A_{hk} c_{kt}\right) \overline{y}.$$

Le condizioni d'integrabilità sono pertanto:

$$\lambda_{st} + \Sigma b_{sh} A_{hk} c_{kt} = \lambda_{ts} + \Sigma b_{th} A_{hk} c_{ks} \quad ; \quad b_{ts} = b_{st} \quad ; \quad D_{sti} = D_{tsi}.$$

Le ultime due si enunciano anche dicendo *che* b_{st} *e* D_{sti} *sono sistemi simmetrici.*

Derivando, *trascurando i termini* in y, y_s (e quindi anche $\overline{Y}_t$) otteniamo:

$$y_{st}^{(0)} = b_{st}\,\overline{Y} + \cdots \;;\; y_{sti}^{(0)} = (b_{sti} + D_{sti})\,\overline{Y} + \cdots \text{ (e analoghe in } z, \ldots).$$

Per studiare V_n cominciamo dal costruire forme proporzionali a $(x, x_1, \ldots, x_n, d^i x)$ per $i = 1, 2$. Ricordando che $x = 1$, $y = y^{(0)} + v\overline{y}$, e analoghe; ricordando che per (15) le $y_s, z_s \ldots$ $(s = 1, 2, \ldots, n-1)$ sono combinazioni lineari di $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_{n-1}$, tali determinanti si riconoscono proporzionali a $\frac{1}{\sqrt{\Delta}}(\overline{y}, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_{n-1}, d^i y)$. Ora è

$$d^2 y = d^2 y^{(0)} + v\, d^2 \overline{y} + \cdots = Y \Sigma (b_{st} + v a_{st})\, du_s\, du_t + \cdots$$
$$d^3 y = d^3 y^{(0)} + v\, d^3 \overline{y} + 3\, d v\, d^2 \overline{y} + \cdots = Y \Sigma (D_{sti} + b_{sti} + v \Delta_{sti}) \times$$
$$\times\, du_s\, du_t\, du_i + 3\, Y \overline{\varphi}_2\, dv + 3\, Y \Sigma (b_{st} + v a_{st})\, du_s\, \delta^2 u_t + \cdots$$

dove sono trascurati i termini in $\overline{y}, \overline{y}_s$, e dove $\delta^2 u$ sono differenziali *controvarianti* (da me definiti al loc. cit.). Posto $\varphi_2^{(0)} = \Sigma b_{st}\, du_s\, du_t$ e $\Phi^{(0)} = \Sigma (\Delta_{sti} + b_{sti})\, du_s\, du_t\, du_i$, le forme cercate sono:

$$F_2 = \varphi_2^{(0)} + v\,\overline{\varphi}_2 \;;\; \Phi_3 = \Phi_3^{(0)} + v\,\overline{\varphi}_3 + 3\,\Sigma (b_{st} + v a_{st})\, du_s\, \delta^2 u_t + 3 \varphi_2\, dv.$$

Indicato con $\delta\varphi_2^{(0)}$ la derivata covariante di $\varphi_2^{(0)}$ secondo φ_2, posto $\Delta_3^{(0)} = 2\Phi_3^{(0)} - 3\delta\varphi_2^{(0)} = \Sigma (2D_{sti} - b_{sti})\, du_s\, du_t\, du_i$, posto $\Delta_3 = 2\Phi - 3dF_2$, sarà $\Delta_3 = \Delta_3^{(0)} + 3\,\overline{\varphi}_2\, dv + 2v\,\overline{\varphi}_3$. (Le $\varphi_2^{(0)}, \varphi_3^{(0)}$ sono le forme analoghe per l'ipersuperficie descritta in un S_{n-1} da un punto, per cui $y^{(0)}, z^{(0)} \ldots$ fossero coordinate omogenee).

Le forme F_2, Δ_3 *si possono considerare come l'elemento lineare proiettivo di* V_n, *purchè*, secondo lo spirito dei nostri metodi, *si consideri come identico ad esso un altro elemento lineare del tipo* $\varrho F_2, \varrho\Delta_3 + F_2 d\sigma$, *o come proiettivamente applicabili le ipersuperficie corrispondenti.* Due ipersuperficie V_n, V'_n del tipo qui studiato, che abbiano come elemento lineare una le forme F_2, Δ_3, l'altra le forme F'_2, Δ'_3, saranno applicabili se F'_2 ed F_2 sono proporzionali, p. es. $F_2 = HF'_2$, e se $\Delta_3 - H\Delta'_3$ è divisibile per F_2. Se ne deduce che in particolare $\overline{\varphi}_2 = H\overline{\varphi}'_2$, e che $\overline{\varphi}_3 - H\overline{\varphi}'_3$ è divisibile per $\overline{\varphi}_2$, ossia, essendo $\overline{\varphi}_3$ e $\overline{\varphi}'_3$ apolari a $\overline{\varphi}_2$, dovrà essere $\overline{\varphi}_3 = H\overline{\varphi}'_3$. La varietà W_{n-1} luogo del punto $\overline{y}, \overline{z}, \ldots$, l'altra W'_{n-1} luogo del punto $\overline{y}', \overline{z}', \ldots$ saranno pertanto applicabili; e quindi, *escluso* il caso banale *che esse siano proiettivamente identiche, dovrà per i risultati stessi di questa Nota essere* $n - 1 = 2$, $n = 3$. *Lo studio delle nostre* V_n *con* $\varrho = 1$ *è così ridotto a quelto delle solite ipersuperficie* W_{n-1} *in uno*

spazio lineare ad n dimensioni; la ricerca delle coppie di tali ipersuperficie applicabili è ridotto allo studio di alcune coppie di superficie W_2 *proiettivamente applicabili nello spazio* S_3 *a sole tre dimensioni.* Le ipersuperficie V_3 corrispondenti sono le stesse, che Schur (Math. Ann., tomo 28) ha già incontrato come eccezionali per il problema dell'applicabilità *in senso metrico.* E non sarebbe difficile completare dal nostro punto di vista le ricerche di Schur; anzi qui la ricerca *si semplifica* perchè per noi l'iperpiano $x = 0$ è un iperpiano generico; per Schur esso è invece l'iperpiano all'infinito, che può avere posizioni particolari rispetto a V_3, ed obbligare perciò all'esame di molti casi distinti. Anche per ragioni di spazio non sviluppo qui perciò i calcoli relativi, che saranno oggetto di una prossima tesi di laurea nella R. Università di Torino.

Meccanica. — *Una proprietà caratteristica delle coazioni elastiche nei solidi elasticamente omogenei.* Nota di Gustavo Colonnetti, presentata dal Socio Gian Antonio Maggi [1].

Consideriamo un solido elastico omogeneo (vale a dire: le cui costanti elastiche siano indipendenti dalle coordinate) libero da vincoli, il quale nel suo *stato naturale* — cioè nello stato di equilibrio stabile che esso spontaneamente assume quando non è soggetto ad alcuna forza esterna — si presenti in uno di quegli stati di coazione elastica di cui mi sono occupato in due Note precedenti [2].

Ed immaginiamo attraverso ad un tale solido praticati tutti quei tagli che sono necessarii perchè i singoli elementi materiali che lo compongono — liberati dai vincoli che inizialmente essi si creavano mutuamente — possano tutti assumere il loro *stato non deformato.*

Nessuna restrizione vogliamo fare relativamente al numero ed alla disposizione di quei tagli, i quali, se in qualche caso particolare potranno limitarsi a rendere il sistema semplicemente connesso, nei casi più generali potranno invece moltiplicarsi all'infinito, fino a sconnettere anche, se fosse necessario, il solido dato nei singoli suoi elementi.

Nè vogliamo che resti in alcun modo limitato il grado di libertà che coi tagli stessi si viene a conferire alle parti del solido che essi separano; perciò riterremo sempre che, una volta praticato un taglio, i punti già affac-

[1] Pervenuta all'Accademia il 28 settembre 1918.

[2] G. Colonnetti, *Su certi stati di coazione elastica che non dipendono da azioni esterne*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXVI, serie 5ª, 2° sem. 1917; *Su di una particolare classe di coazioni elastiche che si incontra nello studio della resistenza delle artiglierie*, id. id., vol. XXVII, serie 5ª, 2° sem. 1918.