# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

---

SERIE QUINTA

---

## RENDICONTI

---

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

---

VOLUME XXVII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

Analisi. — *Sulle equazioni integrali*. Nota II di PIA NALLI, presentata dal Socio PINCHERLE [1].

9. Supponiamo ora che nessuna delle $G_n^{(r)}(s, t)$ sia nulla. Mi propongo di far vedere come si possono determinare le costanti caratteristiche $\mu$ per ognuna delle quali esiste un numero $\delta > 0$ tale da avere quasi dapertutto

$$k^2(s) + \delta < \mu^2 . \tag{13}$$

In seguito faremo vedere come si possono determinare le costanti caratteristiche $\mu$ per ognuna delle quali esiste un numero $\delta > 0$ tale da avere quasi dapertutto

$$k^2(s) - \delta > \mu^2 .$$

Tutte queste sono costanti caratteristiche proprie. Determineremo anche le funzioni fondamentali corrispondenti a tali costanti.

Premettiamo la seguente osservazione. Se una funzione reale $F(s, t)$, sommabile col suo quadrato nel dominio $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq b$, soddisfa quasi dapertutto alla seguente equazione integrale

$$\mu F(s, t) = k(s) F(s, t) + \int_a^b F(v, s) F(v, t) \, dv ,$$

con $\mu$ costante, si può porre

$$F(s, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} [\mu - k(t)] \psi_n(s) \psi_n(t) ,$$

dove le $\psi_n(s)$ formano un sistema ortogonale in $(a,b)$ e formano pure un sistema ortogonale le funzioni $(\mu - k(s)) \psi_n(s)$ moltiplicate per opportune costanti.

Le $\psi_n(s)$ potrebbero anche essere in numero finito, e si presenta questo caso quando $|k(s) - \mu|$ si mantiene quasi dapertutto superiore ad una quantità positiva fissa.

10. Fissato $r$ e posto

$$U_n^{(r)} = \int_a^b \int_a^b (G_n^{(r)}(s, t))^2 \, ds \, dt$$

sarà, per la (4),

$$U_n^{(r)} = \int_a^b \int_a^b G_{n-1}^{(r)}(s, t) \, G_{n+1}^{(r)}(s, t) \, ds \, dt ,$$

quindi, per l'ineguaglianza di Schwarz,

$$(U_n^{(r)})^2 \leq U_{n-1}^{(r)} \, U_{n+1}^{(r)} .$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 24 settembre 1918.

Se poniamo $c_n^{(r)} = \frac{U_n^{(r)}}{U_{n-1}^{(r)}}$, la successione delle $c_n^{(r)}$ è crescente e limitata e tende dunque ad un limite $c^{(r)} > 0$.

Si dimostra che *se* $\mu$ *è una costante caratteristica propria relativa a* $K^{(r)}(s, t)$ *e* $k^r(s)$ *si ha* $\mu^2 \leq c^{(r)}$.

La successione $\frac{U_n^{(r)}}{(c^{(r)})^n}$ è decrescente e tende ad un limite $U^{(r)} \geq 0$.

Se poniamo $F_n^{(r)}(s, t) = \frac{G_{2n}^{(r)}(s, t)}{(c^{(r)})^n}$, la successione delle funzioni $F_n^{(r)}(s, t)$ converge in media verso una funzione $F^{(r)}(s, t)$, e si ha

$$\int_a^b \int_a^b (F^{(r)}(s, t))^2 \, ds \, dt = U^{(r)}.$$

La funzione $F^{(r)}(s, t)$ non è nulla quasi dapertutto quando, e solamente quando, è $U^{(r)} > 0$.

Dalla relazione

$$c^{(r)} F_n^{(r)}(s, t) = k^{2r}(s) \, F_{n-1}^{(r)}(s, t) + \int_a^b K^{(2r)}(v, s) \, F_{n-1}^{(r)}(v, t) \, dv$$

si conclude, per la convergenza in media di $F_n^{(r)}(s, t)$ verso $F^{(r)}(s, t)$,

$$c^{(r)} F^{(r)}(s, t) = k^{2r}(s) \, F^{(r)}(s, t) + \int_a^b K^{(2r)}(v, s) \, F^{(r)}(v, t) \, dv,$$

quindi se è $U^{(r)} > 0$ la $F^{(r)}(s, t)$, considerata come funzione della sola $s$, è funzione fondamentale relativa a $K^{(2r)}(s, t)$ e $k^{2r}(s)$. Ed allora si possono dare due casi: o si ha

$$(14) \qquad \sqrt{c^{(r)}} \, F^{(r)}(s, t) = k^r(s) \, F^{(r)}(s, t) + \int_a^b K^{(r)}(v, s) \, F^{(r)}(v, t) \, dv,$$

$\sqrt{c^{(r)}}$ essendo presa con segno conveniente (cioè $F^{(r)}(s, t)$, considerata come funzione della sola $s$, è funzione fondamentale relativa a $K^{(r)}(s,t)$ e $k^r(s)$); ovvero, ponendo

$$H_i^{(r)}(s, t) = \frac{1}{2} F^{(r)}(s, t) + \frac{(-1)^{i-1}}{2\sqrt{c^{(r)}}} \Big[ k^r(s) \, F^{(r)}(s, t) + \\ + \int_a^b K^{(r)}(v, s) \, F^{(r)}(v, t) \, dv \Big] \qquad (i = 1, 2),$$

$H_1(s, t)$ e $H_2(s, t)$, considerate come funzioni della sola $s$, sono fondamentali relativamente a $K^{(r)}(s, t)$ e $k^r(s)$, e corrispondono rispettivamente alle costanti $+\sqrt{c^{(r)}}$ e $-\sqrt{c^{(r)}}$.

Nel primo caso si trova che $F^{(r)}(s,t)$ soddisfa alla seguente equazione integrale

$$\sqrt{c^{(r)}}\, F^{(r)}(s,t) = k^r(s)\, F^{(r)}(s,t) + \sqrt{c^{(r)}} \int_a^b F^{(r)}(v,s)\, F^{(r)}(v,t)\, dv .$$

Di qui si trae (v. n. precedente)

$$\sqrt{c^{(r)}}\, F^{(r)}(s,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sqrt{c^{(r)}} - k^r(t) \right] \psi_n(s)\, \psi_n(t),$$

dove le $\psi_n(s)$ formano un sistema ortogonale e formano pure un sistema ortogonale le funzioni $\varphi_r(s) = \lambda_n\left(\sqrt{c^{(r)}} - k^r(s)\right) \psi_n(s)$, le $\lambda_n$ essendo convenienti costanti.

Ciascuna delle funzioni $\psi_n(s)$ è fondamentale relativamente a $K^{(r)}(s,t)$ e $k^r(s)$ e corrisponde alla costante $\sqrt{c^{(r)}}$. Inoltre, essendo $\int_a^b \varphi_n^2(s)\, ds = 1$, $\psi_n(s)$ è funzione fondamentale propria.

Se $\varphi(s)$ è una funzione fondamentale relativa a $K^{(r)}(s,t)$ e $k^r(s)$, corrispondente alla costante $\sqrt{c^{(r)}}$, si ha

$$\left(\sqrt{c^{(r)}} - k^r(s)\right) \varphi(s) = \sqrt{c^{(r)}} \int_a^b F^{(r)}(t,s)\, \varphi(t)\, dt ,$$

ossia

$$(15) \qquad \left(\sqrt{c^{(r)}} - k^r(s)\right) \varphi(s) \sim \left(\sqrt{c^{(r)}} - k^r(s)\right) \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(s) \int_a^b \psi_n(s)\, \varphi(s)\, ds .$$

Nel secondo caso si trova che $H_1^{(r)}(s,t)$ e $H_2^{(r)}(s,t)$ soddisfano alle seguenti equazioni

$$(-1)^{i-1} \sqrt{c^{(r)}}\, H_i^{(r)}(s,t) = k^r(s)\, H_i^{(r)}(s,t)$$
$$+ (-1)^{i-1} \sqrt{c^{(r)}} \int_a^b H_i^{(r)}(v,s)\, H_i^{(r)}(v,t)\, dv \qquad (i = 1, 2),$$

e si trova così

$$(-1)^{i-1} \sqrt{c^{(r)}}\, H_i^{(r)}(s,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (-1)^{i-1} \sqrt{c^{(r)}} - k^{(r)}(t) \right] \psi_n^{(i)}(s)\, \psi_n^{(i)}(t),$$

dove le $\psi_n^{(i)}(s)$ formano un sistema ortogonale, come lo formano pure le funzioni $\left((-1)^{i-1}\sqrt{c^{(r)}} - k^r(s)\right) \psi_n^{(i)}(s)$ moltiplicate per convenienti costanti.

Le $\psi_n^{(i)}(s)$ sono funzioni fondamentali proprie relative a $K^{(r)}(s,t)$ e $k^r(s)$ e corrispondono alla costante $(-1)^{i-1}\sqrt{c^{(r)}}$.

Se $\varphi^{(i)}(s)$ è una funzione fondamentale corrispondente alla costante $(-1)^{i-1}\sqrt{c^{(r)}}$ si ha

$$\left((-1)^{i-1}\sqrt{c^{(r)}} - k^r(s)\right) \varphi^{(i)}(s) = (-1)^{i-1} \sqrt{c^{(r)}} \int_a^b H_i^{(r)}(t,s)\, \varphi^{(i)}(t)\, dt ,$$

ossia

$$(16)\qquad \left((-1)^{i-1}\sqrt{c^{(r)}} - k^r(s)\right)\varphi^{(i)}(s) \sim \left((-1)^{i-1}\sqrt{c^{(r)}} - k^r(s)\right)\times$$
$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n^{(i)}(s)\int_a^b \psi_n^{(i)}(s)\,\varphi(s)\,ds\,.$$

Si ha poi

$$\int_a^b H_1^{(r)}(v\,,s)\,H_2^{(i)}(v\,,t)\,dv = 0\,.$$

11. Si può dimostrare che se per qualche $r$ dispari si ha $U^{(r)} > 0$, sarà $U^{(r)} > 0$ per qualunque altro $r$ dispari e $c^{(r)} = (c^{(1)})^r$. Se per qualche $r$ pari si ha $U^{(r)} > 0$ sarà $U^{(r)} > 0$ per qualunque altro $r$ pari e $c^{(r)} = (c^{(2)})^{\frac{r}{2}}$.

Se è $U^{(1)} > 0$ si avrà per qualunque $r$ dispari

$$(17)\qquad F^{(r)}(s\,,t) = F^{(1)}(s\,,t)\sum_{m=0}^{r-1}\left(\frac{k(t)}{\sqrt{c^{(1)}}}\right)^m$$

se è soddisfatta la (14) con $r = 1$.

Quando ciò non succede si ha

$$H_i^{(r)}(s\,,t) = H_i^{(1)}(s\,,t)\sum_{m=0}^{r-1}\left(\frac{k(t)}{(-1)^{i-1}\sqrt{c^{(1)}}}\right)^m \qquad (i = 1\,,2)\,.$$

Sempre nell'ipotesi $U^{(1)} > 0$, se $r$ è pari ed è $c^{(r)} = (c^{(1)})^r$ varrà ancora la (17) se è soddisfatta la (14) con $r = 1$, altrimenti per $r$ pari sarà

$$F^{(r)}(s\,,t) = H_1^{(1)}(s\,,t)\sum_{m=0}^{r-1}\left(\frac{k(t)}{\sqrt{c^{(1)}}}\right)^m + H_2^{(1)}(s\,,t)\sum_{m=0}^{r-1}\left(-\frac{k(t)}{\sqrt{c^{(1)}}}\right)^m\,.$$

Se è $U^{(2)} > 0$, per qualunque $r$ pari è soddisfatta la (14) con $\sqrt{c^{(r)}} > 0$ e sarà per $r$ pari

$$F^{(r)}(s\,,t) = F^{(2)}(s\,,t)\sum_{m=0}^{\frac{r}{2}-1}\left(\frac{k^2(t)}{\sqrt{c^{(2)}}}\right)^m\,.$$

Risulta di qui che è sufficiente limitarsi a considerare i casi in cui è $U^{(1)} > 0$ o $U^{(2)} > 0$.

Si hanno relativamente a ciò alcune notevoli proposizioni.

*Se è quasi dapertutto* $k^2(s) + \varepsilon < c^{(1)}$, *con* $\varepsilon > 0$, *si ha* $U^{(1)} > 0$, $U^{(2)} > 0$, $c^{(2)} = (c^{(1)})^2$.

Riunendo questo con quanto si è trovato al n. precedente possiamo dire che: *condizione necessaria e sufficiente perchè esistano funzioni fondamentali relative a* $K(s\,,t)$ *e* $k(s)$ *le cui corrispondenti costanti caratteristiche* $\mu$ *soddisfino alla* (13) *è che esista un numero positivo* $\varepsilon$ *tale che sia quasi dapertutto* $k^2(s) + \varepsilon < c^{(1)}$.

Quando è soddisfatta quest'ultima condizione $|\pm\sqrt{c^{(1)}} - k(s)|$ si mantiene quasi dapertutto superiore ad una quantità positiva fissa e le $\psi_n(s)$ o le $\psi_n^{(i)}(s)$, a seconda dei casi, sono in numero finito: le (15) e (16) ci dànno, secondo i casi,

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{m} \psi_n(s) \int_a^b \psi_n(s)\, \varphi(s)\, ds\,,$$

$$\varphi^{(i)}(s) = \sum_{n=1}^{m_i} \psi_n^{(i)}(s) \int_a^b \psi_n^{(i)}(s)\, \varphi^{(i)}(s)\, ds\,.$$

*Si ha* $\mathrm{U}^{(1)} > 0$ *se per* $m$ *sufficientemente grande*

$$\frac{\mathrm{U}_m^{(1)}}{\int_a^b \int_a^b k^2(s)\, (\mathrm{G}_{m-1}(s\,,t))^2\, ds\, dt}$$

*si mantiene superiore ad una quantità fissa maggiore di* 1.

Questa condizione è soddisfatta se è soddisfatta quella del primo teorema.

Essendo poi

$$c_2^{(1)} = \frac{\int_a^b \int_a^b [k(s)\,\mathrm{K}(s\,,t) + \mathrm{K}_2(s\,,t)]^2\, ds\, dt}{\int_a^b \int_a^b \mathrm{K}^2(s\,,t)\, ds\, dt}\,,$$

dove poniamo $\mathrm{K}_2(s\,,t) = \int_a^b \mathrm{K}(s\,,v)\,\mathrm{K}(t\,,v)\,dv$, ne viene che si può determinare $\varepsilon > 0$ in modo che, quando è quasi dapertutto $|k(s)| \leq \varepsilon$, si abbia $c_2^{(1)} > \varepsilon^2$, quindi, essendo $c^{(1)} \geq c_2^{(1)}$ sarà $c^{(1)} > \varepsilon^2$, ed è soddisfatta la condizione del primo teorema.

Possiamo quindi dire che; *data la funzione* $\mathrm{K}(s\,,t)$ (soddisfacente alle condizioni poste nella Nota I) *si può determinare un numero* $\varepsilon > 0$ *in modo che, qualunque sia la funzione* $k(s)$ *soddisfacente quasi dapertutto alla condizione* $|k(s)| \leq \varepsilon$, *esiste almeno una funzione fondamentale propria relativa al nucleo* $\mathrm{K}^{(n)}(s\,,t)$ *ed alla funzione* $k^n(s)$ $(n = 1\,,2\,,\ldots)$. Per $k(s) = 0$ si ritrova un noto teorema dato da Hilbert e Schmidt.

Siccome poi ogni funzione fondamentale relativa a $\mathrm{K}(s\,,t)$ e $k(s)$ lo è anche relativamente a $\mathrm{K}(s\,,t)$ e $k(s) + h$, con $h$ costante, e viceversa, si può dare una forma più generale al teorema precedente, sostituendo all'espressione: « *qualunque sia la funzione* $k(s)$ *soddisfacente quasi dapertutto alla condizione* $|k(s)| \leq \varepsilon$ » la seguente: « *qualunque sia la funzione* $k(s)$ *per la quale si possa determinare una costante* $h$ *in modo che sia quasi dapertutto* $|k(s) + h| \leq \varepsilon$ ».