ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

Astronomia. — *Il problema dell'astrometria fotografica nel suo aspetto più generale.* Nota II di VITTORIO NOBILE, presentata dal Corrisp. V. CERULLI [1].

La soluzione *autonoma* (cioè indipendente dalla cognizione di dati anteriori strumentali o di osservazione) del problema della astrometria fotografica è evidentemente ottenuta, qualunque sia la ripartizione delle aree fotografate sulla sfera celeste, purchè solo tali aree si compenetrino almeno due a due, quando si conoscano i centri delle singole lastre (intersezione dell'asse ottico col piano della lastra) e la distanza focale dell'obbiettivo: è quindi naturale porre l'anzidetto problema nei seguenti termini:

Date alcune immagini fotografiche della sfera celeste, ottenute dal medesimo obbiettivo e tali che ciascuna di esse comprenda, con una o più altre contigue, delle regioni comuni, determinare, sulla base dei soli elementi forniti dall'esame delle immagini, i centri delle singole lastre e la distanza focale dell'obbiettivo e risalire così alla rappresentazione sferica delle configurazioni stellari.

Poichè le diverse immagini fotografiche possono considerarsi come le projezioni delle diverse regioni del cielo dal centro ottico dell'obbiettivo sui diversi piani tangenti ad una sfera avente per raggio la distanza focale, è chiaro che le diverse lastre potranno poi immaginarsi disposte nello spazio in modo da costituire un poliedro circoscritto alla sfera medesima. Individuato tale poliedro, che supporremo convesso, nei suoi elementi metrici e quindi la sfera tangente, l'insieme dei raggi di questa sfera passanti per le immagini delle stelle offrirà la rappresentazione di una sfera omotetica inversa e quindi *non prospetticamente sovrapponibile* alla sfera celeste. Per realizzare la sovrapposizione prospettica della sfera « fotografica » alla celeste bisognerà applicare alla prima una *trasformazione in sè* costituita da una simmetria intorno al centro (ciò che potrà farsi analiticamente dopo esauriti i calcoli numerici), oppure — come risulta da ovvie considerazioni geometriche che per brevità omettiamo — invertire, durante le misure, le facce delle singole lastre disponendo lo strato sensibile verso l'esterno della sfera fotografica (opposto al centro).

Ciò posto è facile mostrare, e di ciò ci occuperemo in primo luogo, come la conoscenza della lunghezza degli spigoli situati nelle singole facce del poliedro innanzi definito sia in generale sufficiente, insieme all'altra con-

[1] Pervenuta all'Accademia il 16 settembre 1918.

dizione che il poliedro debba essere circoscrivibile ad una sfera, ad individuare il poliedro medesimo col centro della sfera iscritta e a fornire pertanto, con calcoli più o meno semplici, tutti gli elementi per la rappresentazione sferica delle configurazioni stellari.

Dette infatti x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 ; ... x_v, y_v, z_v le coordinate rispetto ad un qualunque sistema ortogonale dei v vertici del poliedro, abbiamo, detto s il numero degli spigoli, anzitutto il sistema di s equazioni:

$$(1) \qquad (x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2 = l^2_{p,q} . \\ (p \lesseqgtr q \,;\, p, q = 1, 2, 3, \ldots v) .$$

Detto inoltre f il numero delle facce e n_i il numero dei vertici giacenti nella faccia i^{esima}, abbiamo $n_i - 3$ condizioni del tipo:

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} x_{1,i} & y_{1,i} & z_{1,i} & 1 \\ x_{2,i} & y_{2,i} & z_{2,i} & 1 \\ x_{3,i} & y_{3,i} & z_{3,i} & 1 \\ x_{r,i} & y_{r,i} & z_{r,i} & 1 \end{vmatrix} = 0 ,$$

che possiamo chiamare di complanarità, in quanto che esprimono che uno qualunque $x_{r,i}, y_{r,i}, z_{r,i}$ dei vertici della faccia i^{esima} giace nel piano determinato da tre altri dati.

A tali equazioni fra le coordinate dei vertici vanno aggiunte altre *sei* — arbitrarie purchè non contradittorie colle (1) e (2) — atte a fissare la posizione del poliedro nello spazio. Possiamo, p. es., far coincidere un vertice coll'origine delle coordinate, porre un altro vertice contiguo al primo sull'asse delle x e un terzo nel piano xy di modo che sia:

$$(3) \qquad x_1 = y_1 = z_1 = y_2 = z_2 = z_3 = 0 .$$

Dobbiamo infine introdurre la condizione che il poliedro sia circoscrivibile ad una sfera: ciò si traduce in altre equazioni in numero di $f - 1$ fra le $3v$ coordinate dei vertici e le 3 coordinate ξ, η, ζ del centro della sfera, equazioni le quali esprimono che la distanza fra ξ, η, ζ e il piano di una faccia è uguale a quella dello stesso punto dalle altre $f - 1$ facce.

Numerate le facce del poliedro secondo un ordine arbitrario e dette in generale $x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j}$ le coordinate dell' i^{esimo} vertice della faccia j, le equazioni dei piani delle facce 1 e j, saranno, rispettivamente

$$\begin{vmatrix} x_{1,1} & y_{1,1} & z_{1,1} & 1 \\ x_{2,1} & y_{2,1} & z_{2,1} & 1 \\ x_{3,1} & y_{3,1} & z_{3,1} & 1 \\ X & Y & Z & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} x_{1,j} & y_{1,j} & z_{1,j} & 1 \\ x_{2,j} & y_{2,j} & z_{2,j} & 1 \\ x_{3,j} & y_{3,j} & z_{3,j} & 1 \\ X & Y & Z & 1 \end{vmatrix} = 0$$

o, più concisamente, $D_1(X, Y, Z) = 0$, $D_j(X, Y, Z) = 0$.

La condizione di circoscrivibilità del poliedro ad una sfera si esprime colle $f-1$ equazioni:

$$\sqrt{\lambda_j}\, D_1 = \pm \sqrt{\lambda_1}\, D_j , \qquad (j = 2, 3, \ldots f)$$

dove λ_1, λ_j hanno il noto significato (somme dei quadrati dei coefficienti di X, Y, Z, rispettivamente in D_1 e D_j, coefficienti che, nel nostro caso, sono i complementi algebrici di X, Y, Z nei due determinanti). Le quantità λ_1, λ_j rappresentano perciò rispettivamente, secondo note formole di geometria analitica, $4 S_1^2$ e $4 S_j^2$ quando con S_1 ed S_j si indichino le aree dei triangoli formati dai punti che individuano i due piani. L'equazione ultima, dopo l'elevazione a quadrato, necessaria per far sparire le irrazionalità nelle incognite, e dopo aver sostituito ad X, Y, Z le coordinate del centro della sfera, diventa:

$$S_j [D_1(\xi, \eta, \zeta)]^2 = S_1 [D_j(\xi, \eta, \zeta)]^2 . \tag{4}$$

Abbiamo pertanto fra le $3(v+1)$ incognite un numero N di equazioni uguale a

$$s + \sum_{i=1}^{i=f} (n_i - 3) + 6 + (f-1) ,$$

donde, poichè è evidentemente per ogni poliedro $\sum_{i=1}^{i=f} n_i = 2s$ essendo ogni spigolo contato due volte nella somma,

$$N = 3(s-f) + 5 + f$$

e quindi, introducendo la relazione di Eulero, valida per ogni poliedro convesso,

$$v + f = s + 2 ,$$

abbiamo infine:

$$N = 3(v-2) + f + 5 = 3v + f - 1 .$$

La differenza fra il numero delle equazioni e quello delle incognite è così

$$3v + f - 1 - 3(v+1) = f - 4$$

ed è necessariamente positiva o al minimo nulla (tetraedro) [1].

[1] Particolarmente interessante, almeno dal punto di vista teorico, è questo caso di minimo nel quale le equazioni di condizione si possono suddividere in due gruppi risolubili separatamente: il primo di *dodici*, cioè sei oltre le (3), sufficienti ad individuare in posizione e forma il poliedro ed altre $f-1$, cioè *tre*, per determinare le coordinate ξ, η, ζ del centro. Senza soffermarci in calcoli elementarissimi e senza occuparci qui delle difficoltà tecniche e strumentali — forse non insormontabili — inerenti alla applicazione pratica del metodo nel caso $f=4$, è bene rilevare esplicitamente come *bastino quattro lastre, purchè comprendenti nel loro insieme l'intera sfera celeste, per ottenere la soluzione autonoma del problema dell'astrometria fotografica.*

Le condizioni introdotte *sono quindi in generale sovrabbondanti*. Perchè le equazioni del nostro sistema, costituite dalle (1), (2), (3) e (4), siano compatibili bisogna che fra i coefficienti delle dette equazioni, ovvero, ciò che torna lo stesso, fra le costanti $l_{p,q}$, siano verificate $f - 4$ condizioni: questo certamente accade quando i valori delle $l_{p,q}$ siano quelli dedotti dalla misura delle lastre secondo il procedimento che passeremo in seguito ad indicare; poichè noi conosciamo *di fatto* la effettiva esistenza del poliedro di cui ci proponiamo di calcolare gli elementi metrici, poliedro che è quello costituito dai piani tangenti in punti di una sfera, distinti sebbene non ancora determinati.

Nel caso generale, quando cioè fra le $l_{p,q}$ non esistono altre particolari relazioni numeriche, sappiamo dalla teoria generale della eliminazione che la soluzione generale, quando esiste, *è unica*. È bene tuttavia chiarire il senso in cui bisogna qui intendere questa *unicità*. Le equazioni (1), (2), (3) e (4), che formano complessivamente il nostro sistema, rimangono tutte identicamente verificate, quando alle x, ξ ovvero alle y, η o alle z, ζ o anche a più gruppi di coordinate insieme si cambi il segno. In altri termini se il sistema ammette la soluzione

$$\begin{array}{lll} x_i = a_i \,, & y_i = b_i \,, & z_i = c_i \\ \xi = \alpha & \eta = \beta & \zeta = \gamma \end{array} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots v)$$

dovrà evidentemente anche ammettere tutte le $2^3 = 8$ soluzioni che si ottengono da

$$\begin{array}{lll} x_i = \pm a_i \,, & y_i = \pm b_i \,, & z_i = \pm c_i \\ \xi = \pm \alpha & \eta = \pm \beta & \zeta = \pm \gamma \end{array}$$

prendendo nei tre gruppi di coordinate tutte le possibili combinazioni di segni. Si hanno così otto poliedri che si trasformano l'uno nell'altro con una o più simmetrie ortogonali rispetto ai piani coordinati. Possono anche dedursi tutti da due fra essi, perchè l'operazione di cambiare il segno ad uno o più gruppi di coordinate equivale ad una trasformazione di coordinate nella quale non cambia nè l'origine nè la direzione degli assi, ma solo il verso.

Le figure corrispondenti sono perciò congruenti o sovrapponibili quando il seno del triedro delle direzioni positive dei nuovi assi (modulo della trasformazione) è eguale a $+1$, ovvero in simmetria ortogonale rispetto ad uno dei piani coordinati quando il detto modulo è eguale a -1. Si hanno così due gruppi di quattro poliedri ciascuno, essendo congruenti i poliedri di ciascun gruppo. Non abbiamo così, in sostanza, che *due* soluzioni diverse delle quali si può subito scegliere quella conveniente al problema notando che, fissato un certo ordine di percorrenza del perimetro di una data faccia relativo ad una certa successione dei vertici, il corrispondente movimento dovrà apparire compiersi nello stesso senso ad un osservatore situato al centro del poliedro trovato e ad un altro che guardi la data lastra dal lato innanzi definito (opposto allo strato sensibile).