ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1918.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

Algebra. — *Sulle radici reali delle equazioni iterate di una equazione quadratica.* Nota del Socio S. PINCHERLE [1].

1. Con $\alpha(x)$ indico l'espressione $x^2 - a$, dove a è un numero positivo al quale si darà il nome di *base*; con $\alpha_n(x)$ ne indico le iterate, per modo che è

$$\alpha_1(x) = \alpha(x)\,,\ \alpha_2(x) = \alpha^2(x) - a\,, \ldots\ \alpha_n(x) = \alpha^2_{n-1}(x) - a\,.$$

Quando la base si voglia porre in evidenza, si scriverà $\alpha_n(x\,;a)$ al posto di $\alpha_n(x)$.

Le radici dell'equazione

$$(\alpha) \qquad \alpha_n(x) = 0$$

si possono tutte esprimere mediante catene di n radicali quadratici

$$(\beta) \qquad \pm\sqrt{a \pm \sqrt{a \pm \cdots \pm \sqrt{a}}}\,.$$

Ad ogni diversa disposizione dei segni $+$ o $-$ corrisponde in generale una diversa radice della (α).

Scopo della presente Nota è di dare un criterio per la realtà delle radici (β).

2. È opportuno anzitutto di stabilire una notazione che permetta di porre in evidenza, nelle espressioni (β), la successione dei segni $+$ e $-$.

[1] Pervenuta all'Accademia il 6 settembre 1918.

I segni radicali di (β) verranno contati da sinistra verso destra. Supposto il primo radicale affetto da segno $+$, esso sia seguìto immediatamente da $r_1 - 1$ con lo stesso segno $+$; a questi succeda un radicale con segno $-$, seguìto immediatamente da $r_2 - 1$ con segno $+$, e così via; infine, l'ultimo segno $-$ sia seguìto da $r_p - 1$ segni $+$. Una tale catena verrà rappresentata colla notazione

$$(\gamma) \qquad (r_1, r_2, \dots r_p),$$

dove, essendo n il numero dei radicali, gli interi positivi (non nulli) r_1, $r_2, \dots r_p$ dànno

$$(\delta) \qquad r_1 + r_2 + \cdots + r_p = n.$$

Quando il primo radicale avesse segno $-$, si farebbe precedere da questo segno la parentesi: così, la radice contraria di (γ) si scriverà

$$-(r_1, r_2, \dots r_p), \quad \text{od anche} \quad (0, r_1, r_2, \dots r_p).$$

Agli interi $r_1, r_2, \dots r_p$ daremo il nome di *cifre* [1]. Volendo porre in evidenza la base, la (γ) si modificherà scrivendo

$$(\delta') \qquad (r_1, r_2, \dots r_p; a).$$

Data una catena (γ), le catene che se ne deducono sopprimendo i primi radicali si diranno catene *secondarie* della (γ). Tali saranno

$$(r_1 - 1, r_2, \dots r_p), (r_1 - 2, r_2, \dots r_p), \dots (r_2, r_3, \dots r_p), \dots (r_p).$$

3. Risalendo nella successione delle catene secondarie, le $(1), (2), \dots (r_p)$ sono certamente reali. Se ne incontriamo una immaginaria $(1, r_i, r_{i+1}, \dots r_p)$, le precedenti saranno tutte non reali.

Trattandosi di radici quadrate di elementi non reali, s'intenderà che il segno $+$ sia attribuito a quel valore della radice il cui argomento è compreso fra 0 e π (π escluso), ed il segno $-$ a quello il cui argomento è compreso fra π e 2π (2π escluso).

4. Può accadere che due delle espressioni (β) siano fra loro uguali. Ciò richiede — condizione necessaria e sufficiente — che una delle catene secondarie di una (β) abbia il valore zero; in altri termini, una almeno fra le equazioni $\alpha_m(x) = 0$, con $m < n$, deve ammettere la radice zero. Osservando poi che, per $n > 1$, il termine indipendente da x nella (α) non è altro che $\alpha_{n-1}(a)$, la condizione precedente equivale al fatto che l'equazione $\alpha_{m-1}(x) = 0$ ammetta per radice a. Questo fatto, che un'equazione della

[1] Cfr. Rendic. dell'Accademia di Bologna, 17 febbraio 1918; Rendic. dell'Acc. di Torino, 28 aprile 1918. Queste Note verranno citate rispettivamente colle lettere A e B.

classe (α) abbia per radice lo zero o la base, può accadere soltanto per valori particolari della base, i quali si diranno *valori speciali* o *critici*.

È evidente che l'uguaglianza di due delle espressioni (β) equivale alla presenza di una radice doppia per la (α).

Se due equazioni (α), di grado diverso, hanno una radice comune x, la base è speciale: infatti da

$$\alpha_n(x) = 0 \ , \ \alpha_m(x) = 0 \ , \ (n > m)$$

segue

$$\alpha_{n-m}(\alpha_m(x)) = \alpha_{n-m}(0) = 0 \, .$$

Osservando che è

$$(\varepsilon) \qquad \frac{d\alpha_m(x)}{dx} = 2^n x \, \alpha_1(x) \, \alpha_2(x) \dots \alpha_{n-1}(x) \, ,$$

si conferma che se la (α) ha una radice multipla x, per questa, annullandosi la derivata, sarà $\alpha_m(x) = 0$ per un $m < n$, e quindi, essendovi una radice comune a due equazioni (α) di indice diverso, la base sarà speciale ([1]).

5. I valori speciali della base soddisfano dunque ad equazioni della forma

$$(\zeta) \qquad \alpha_m(u\,;u) = 0 \, , \qquad (m = 0 \, , 1 \, , 2 \, , \dots)$$

cioè alle

$$(\zeta') \qquad \left\{ \begin{array}{l} u = 0 \ , \ u^2 - u = 0 \ , \ (u^2 - u)^2 - u = 0 \, , \\ ((u^2 - u)^2 - u)^2 - u = 0 \, , \dots \end{array} \right.$$

Poichè la base è positiva, l'insieme dei suoi valori speciali è dunque costituito dal sistema delle radici positive delle (ζ). A questo sistema appartiene il valore $u = 1$, radice di tutte le (ζ) d'indice dispari. Le radici delle (ζ) godono di interessanti proprietà, dalle quali però possiamo qui prescindere, e che si deducono senza difficoltà dalla relazione ricorrente

$$\alpha_m = \alpha_{m-1}^2 - u \, .$$

Ci conviene solo di notare che ogni radice u della (ζ) soddisfa ad una uguaglianza della forma

$$(\eta) \qquad \pm\sqrt{u \pm \sqrt{u \pm \cdots \pm \sqrt{u}}} = u \, ,$$

con m radicali; ad ognuna delle radici corrisponde una diversa disposizione dei segni.

6. Consideriamo dapprima l'uguaglianza (η) in cui siano tutti i segni positivi:

$$(\theta) \qquad \sqrt{u + \sqrt{u + \cdots + \sqrt{u}}} = u \, ;$$

([1]) V. Nota B, n. 8.

questa, poichè m sono i radicali, può scriversi secondo la notazione (δ') del n. 2:

$$(\theta') \qquad (m\,; u) = u\,.$$

In (θ), il primo membro è maggiore di u per $u \leq 1$, è minore di u per $u \geq 2$ [1]; è facile inoltre di dimostrare che $(m\,; u) - u$ è funzione decrescente di u; ne viene dunque che la (θ) ha un'unica soluzione positiva, che indicherò con s_m, e che per $m \geq 1$ è compresa fra 1 e 2.

Essendo $(n\,; u) > (m\,; u)$ per $n > m$, sarà $(n\,; s_m) > s_m$, da cui si deduce $s_n > s_m$; ed infatti, si ha

$$(n\,; u) > u \;\text{ per }\; u < s_n \quad , \quad (n\,; u) < u \;\text{ per }\; u > s_n\,.$$

Le s_n formano dunque una successione crescente. È $s_0 = 0$, $s_1 = 1$, $s_2 = 1{,}754\ldots$, ecc.

Le s_n essendo crescenti ed inferiori a 2, esse tendono ad un limite — loro limite superiore — che dico essere uguale a 2. Infatti, se questo limite S fosse minore di 2, si avrebbe

$$(r\,; u) < u$$

per r arbitrariamente grande, se u è un valore compreso fra S e 2. D'altra parte, essendo

$$\lim_{r=\infty} (r\,; u) = \tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1+4u}\right)$$

che è maggiore di u per ogni u inferiore a 2 [2], si può prendere r abbastanza grande perchè sia $(r\,; u) > u$: vi è dunque contraddizione nel supporre $S < 2$. La successione delle s_m tende dunque al limite 2.

Fra le radici delle (ζ), la s_m è la massima positiva; infatti, per ogni $u > s_m$ è $(m\,; u) < u$, e quindi *a fortiori* è minore di u ogni espressione $\sqrt{u \pm \sqrt{u \pm \cdots}}$ formata da m radicali che, a differenza di $(m\,; u)$, non siano tutti positivi.

7. Veniamo ora a studiare la (η) nel caso in cui non tutti i segni siano positivi. Tale sarà però il primo segno; il primo membro verrà dunque a scriversi $f = (r_1, r_2, \ldots r_q\,; u)$ che indicherò talvolta brevemente anche con $f(u)$. La catena secondaria $(r_i, r_{i+1}, \ldots r_q)$ si indicherà con f_i, cosicchè $f_1 = f$.

Paragonando le cifre successive di f e di f_i, sia

$$r_1 = r_i\,, r_2 = r_{i+1}\,, \ldots r_{k-1} = r_{i+k-2}\,, r_k \gtrless r_{i+k-1}\,,$$

(1) V. Nota A, n. 3.
(2) V. Nota A, n. 3.

dove k è ≥ 1. Allora, se k è dispari ed $r_k > r_{i+k-1}$, per ogni valore u che rende f_i ed f reali, è generalmente $f > f_i$ e così è pure se k è pari ed $r_k < r_{i+k-1}$. Se invece è k dispari ed $r_k < r_{i+k-1}$, oppure k pari ed $r_k > r_{i+k-1}$, sarà $f < f_i$. Questo fatto si esprimerà dicendo che la catena f è rispettivamente maggiore o minore della sua secondaria f_i. Si è detto « generalmente » perchè per qualche valore speciale di u può essere $f = f_i$; quando sia

$$(\iota) \qquad f = (r_1, r_2, \dots r_{i-1}, r_1, r_2, \dots r_{i-1} - 1)$$

ed $\bar{u}$ sia soluzione di $f_i(u) = u$, si avrà $f(\bar{u}) = \bar{u}$: ma per ogni altro valore di u che renda le catene reali, è $f > f_i$ se è $i - 1$ dispari, $f < f_i$ se è $i - 1$ pari, e si potrà usare in corrispondenza la denominazione di *maggiore* e *minore* nel confronto fra f ed f_i.

8. Si noti che nel caso della (ι), è $\dfrac{df}{du} = \pm \infty$ per $u = \bar{u}$, ed un esame di carattere elementare mostra facilmente che vale il segno $+$ se $i - 1$ è dispari, il segno $-$ se $i - 1$ è pari. Onde per $u > \bar{u}$ e sufficientemente prossimo, è $\dfrac{df}{du} > 1$ nel caso di $f > f_i$, e quindi $f(u) - u$ è, in quelle condizioni, funzione crescente di u.

9. Possiamo ora cercare la condizione sotto la quale un'equazione

$$(\varkappa) \qquad f(u) = u, \quad \text{con} \quad f = (r_1, r_2, \dots r_q)$$

ha soluzione reale (positiva). Si noti che per u maggiore della soluzione (se è unica, e della massima se eventualmente ve ne fosse più d'una), è $f(u) < u$. La condizione in discorso è data dal seguente

Teorema. — « Perchè la $(\varkappa)$ abbia soluzione reale, che non sia soluzione di una $f_i = u$, occorre e basta che sia $f > f_i$ per $i = 2, 3, \dots q$ ».

a) Intanto, il teorema è vero nel caso di $q = 2$.

Se infatti è $(r_1, r_2) > (r_2)$, ne consegue necessariamente $r_1 > r_2$. Sia $r_1 - 1 > r_2$; è $s_{r_1-1} > s_{r_2}$, onde $f(s_{r_1-1}) > f(s_{r_2}) > (r_2; s_{r_2}) = s_{r_2}$, onde per $u = s_{r_1-1}$ è $f(u) > u$; ma poichè si ha $(r_1, r_2) < r_1$, è $f < u$ per $u \geq s_{r_1}$; onde la $(\varkappa)$ ha soluzione reale compresa fra s_{r_1-1} ed s_{r_1}. Sia invece $r_1 - 1 = r_2$; si è nel caso considerato al n. 7, con $\bar{u} = s_{r_2}$; per $u > s_{r_2}$ e sufficientemente prossimo, è $f(u) - u$ crescente onde, essendo $f(u) = u$ per $u = s_{r_2}$, è $f(u) > u$ per $u > s_{r_2}$ e abbastanza prossimo; è invece $f(u) < u$ per $u = s_{r_1}$, onde vi è una radice di $(\varkappa)$, anche in questo caso, fra s_{r_1-1} ed s_{r_1}.

Se invece è $(r_1, r_2) < (r_2)$, il che richiede $r_1 < r_2$, f non è reale per $u < s_{r_2}$, come del resto nel caso precedente, ma per $u \geq s_{r_2}$ è $(r_1, r_2) < (r_2) < u$, e quindi $f(u) - u$ è costantemente negativo: la $(\varkappa)$ non ha soluzione. Per $n = 2$ la proposizione è dunque verificata.

$b)$ Si supponga il teorema dimostrato per le catene di $q-1$ cifre; dico che esso vale per le catene di q cifre $f=(r_1, r_2, \dots r_q)$. Fra le $f_i=(r_i, r_{i+1}, \dots r_q)$, sia f_k la *massima* catena; $f_k=u$ ammette dunque soluzione, e sia essa σ, con $f_k<u$ per $u>\sigma$. Per $u<\sigma$, le $f_{k-1}, f_{k-2}, \dots f_2, f$ sono non reali. Ora, sia $f>f_k$. Ne viene $f(\sigma)>f_k(\sigma)=\sigma$, ed eccezionalmente (caso del n. 7), $f(\sigma)=\sigma$. Nel caso generale è dunque $f>u$ per $u=\sigma$, $f<u$ per $u=s_{r_1}$, onde $f=u$ ha radice fra σ ed s_{r_1}. Nel caso eccezionale, per essere $f>f_k$, è (n. 8) $\frac{df}{du}=+\infty$ per $u=\sigma$ e quindi $\frac{df}{du}-1>0$, cioè $f-u$ crescente per valori di u maggiori di σ ed abbastanza prossimi a σ, ondè $f>u$ per questi valori, mentre è $f<u$ per $u>s_{r_1}$; vi è dunque una radice di $f=u$ fra σ ed s_{r_1}. Questo caso eccezionale è quello in cui la $(\ast)$ ha più di una soluzione reale, ma ve n'ha una sola che non appartiene ad una $f_i=u\,(i>1)$.

Sia invece $f<f_k$. Si ha $f(\sigma)\leq f_k(\sigma)=\sigma$, e, per $u>\sigma$, è $f(u)<$ $<f_k(u)<u$; la $f=u$ non ha dunque in generale soluzione reale, ed eccezionalmente può avere la soluzione σ, appartenente pure alle $f_k=u$. Il teorema è così dimostrato.

Si noti che la $f>u$ può venire soddisfatta se, e solo se è $f>f_i$, $(i=2, 3, \dots q)$.

10. Dal teorema precedente è facile di dedurre la condizione sotto cui la $f=(r_1, r_2, \dots r_q\,;\,u)$ è reale. Intanto, lo è per ogni $u\geq 2$. Nel caso $u<2$, fra le secondarie $f_2, f_3, \dots f_q$, cerchiamo la massima, e sia f_k. Per essere massima, le è applicabile la proposizione del n. 9, e quindi vi è un valore σ_k tale che per $u<\sigma_k$ è f_k non reale o $>u$, per $u=\sigma_k$ è $f_k=u$, e per $u>\sigma_k$ è $f_k<u$. Ne viene che f non è reale per $u<\sigma_k$, mentre invece, per $u>\sigma_k$ essendo, in conseguenza di $f_k<u$, anche $f_i<u$ per ogni indice i da 2 a q, la f è reale. Il limite di realtà ξ per la f, cioè un numero ξ tale che f sia reale per $u\geq\xi$ e non reale per $u<\xi$, è il numero σ_k relativo alla catena secondaria massima f_k, numero che è radice di $f_k=u$ ma non radice di $f_i=u$ per $i>k$.

11. Con ciò si è in grado di rispondere alla domanda enunciata al n. 1 come scopo della presente Nota. « Per riconoscere se la (β), radice dell'equa-
« zione (α), sia o no reale, essendo nota la disposizione, in (β), dei segni
« $+$ e $-$, si scriverà codesta radice nella forma

$$(r_1, r_2, \dots r_q\,;\,a)\quad,\quad(r_1+r_2+\cdots+r_q=n),$$

« indi, dall'esame delle cifre, si riscontrerà quale sia la massima fra le
« catene secondarie

$$f_2=(r_2, r_3, \dots r_q),\ f_3=(r_3, \dots r_q), \dots f_q=(r_q):$$

« sia essa $f_k = (r_k, r_{k+1}, \dots r_q)$. Per questa, considerata come funzione « della u, esisterà un valore σ che rende $f_k(u) = u$ mentre non dà $f_i(u) = u$ « per alcun valore dell'indice i superiore a k. Allora la radice (β) è reale « se la base a è superiore od uguale a σ, non è reale se è $a < \sigma$ ».

12. Un'osservazione assai semplice mostra che fra due radici consecutive s_{r-1} ed s_r cadono infiniti valori speciali di u. Infatti, presa l'equazione

$$(r, 1, 1, \dots 1) = u, \tag{λ}$$

dove è $r > 1$, questa, avendo il primo membro nelle condizioni del n. 9, ha una soluzione σ che è evidentemente compresa fra s_{r-1} ed s_r; questa soluzione è un valore speciale per u. E potendosi prendere arbitrariamente il numero delle cifre 1 in (λ), e la σ essendo diversa per due diverse tali equazioni, il numero dei valori speciali compresi fra s_{r-1} ed s_r viene dunque ad essere infinito.

Meccanica. — *ds^2 einsteiniani in campi newtoniani.* III. *Formule ausiliarie.* Nota del Socio T. Levi-Civita [1].

Ho raccolto in questa terza Nota considerazioni e sviluppi aventi ancora carattere preparatorio, in quanto trovano la loro principale, se non esclusiva, ragion d'essere nel sussidio che presteranno alla effettiva integrazione delle equazioni gravitazionali di Einstein in alcuno dei casi o sottocasi già classificati nella Nota II.

Circa il contenuto specifico rileverò che si tratta in primo luogo del passaggio da una forma fondamentale ad un'altra che ne differisce per un semplice fattore (trasformazione conforme). Ho assegnato le relazioni esplicite fra omologhe derivate covarianti (§ 1) e omologhi simboli di Riemann (§ 2). A dire il vero tali relazioni figurano già in una Nota del sig. Finzi pubblicata nel 1903 [2]; ma ho stimato opportuno ricavarle *ex novo* per comodità del lettore.

Nel § 3 ho indicato un processo di riduzione da $n+1$ a n variabili, di cui già mi sono valso (per $n = 3$) nel riferire al ds^2 spaziale (anzichè al ds'^2 quadridimensionale) le equazioni della statica einsteiniana. In sostanza si troveranno qui ripetute, per n qualunque, formule che già scrissi per $n = 3$, onde farne (§ 4) applicazione, per $n = 2$, al calcolo dei simboli di Ricci relativi ad una forma ternaria del tipo

$$d\sigma^2 + A^2\, dx_3^2$$

[1] Pervenuta all'Accademia l'11 ottobre 1918.

[2] *Le ipersuperficie a tre dimensioni che si possono rappresentare conformemente sullo spazio euclideo,* Atti del R. Istituto Veneto, T. LXII, pp. 1049-1062.