ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

Ogni termine di (22) *è intrinseco, e si può studiare separatamente*: ecco il grande vantaggio di avere usato simboli di calcolo assoluto, che hanno qui evitato assai gravi difficoltà!

Indicheremo con S_m il valore metrico S (corrispondente al caso che si usino coordinate cartesiane, che g sia l'elemento lineare di Gauss, di cui indichiamo con H il discriminante, e che infine F_2 sia la seconda forma di Gauss: cfr. § 3). Sarà

$$(22)_{bis} \qquad S_m = -d\left[\sqrt{H}\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u)\right] +$$
$$+ \sqrt{H}\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u)\left(\frac{3}{2}\,dF_2 + \frac{1}{2}\,F_3 - \frac{3}{8}\,F_2 d\log K\right) + (x, Dx, D_2 x, D_3 x).$$

Confrontando il solo primo termine coi risultati di T, si trova:

$$(23) \qquad S_m = \frac{1}{T}\,\frac{1}{R^3}\,ds^6$$

(R, T raggi di curvatura e torsione).

Si noti che $\sqrt{H}\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u) = \dfrac{ds^3}{R_g^3}$ (R_g raggio di curvatura geodetica). Quindi per le *geodetiche* S_m si riduce al suo *ultimo termine*; *il quale* $\left(\text{pertanto vale } \dfrac{1}{T}\,\dfrac{1}{R^3}\,ds^6 \text{ calcolato lungo la geodetica tangente, cioè}\right)$ *vale* $\dfrac{1}{T_g}\,\dfrac{1}{R_n^3}\,ds^6$ (T_g, R_n raggi di torsione geod. e di curvatura normale). Per mezzo dei risultati ottenuti in (A) per le forme F_2, F_3, dalla $(22)_{bis}$ si possono trarre svariati significati metrici di S_m.

Matematica. — *Alcune formule sulle superficie applicabili.* Nota di MATTEO BOTTASSO, presentata dal Corrispondente R. MARCOLONGO [1].

Alle formule sulla flessione d'una superficie inestendibile comunicate in una mia Nota [2], credo utile aggiungerne alcune altre, non meno notevoli, delle quali spero poter mostrare fra breve l'importanza nella teoria dell'applicabilità delle superficie. Queste nuove formule esprimono, in modo esplicito, l'omografia $d\lambda$ differenziale dell'isomeria vettoriale λ, che muta gli elementi lineari (dP) uscenti dal punto generico P, di una superficie S, nei corrispondenti elementi (dP_0) uscenti dal punto P_0 (omologo di P) di

[1] Pervenuta all'Accademia il 4 luglio 1918.

[2] M. Bottasso, *Sulla flessione delle superficie inestendibili* (Rend. R. Accad. dei Lincei, vol. XXIV (5ª), 2° sem. 1915, pp. 174-182).

una superficie S_0 applicabile ad S, nonchè il vettore unitario $\mathbf{N}$, normale ad S in P, nell'analogo vettore $\mathbf{N}_0$ di P_0. Di tale omografia $d\lambda$, che risulta degenere, ho calcolato (nn. 2 e 3) gl'invarianti, il vettore e l'R. Valendomi poi dei risultati sulle derivate delle isomerie vettoriali, in generale, dal prof. Burali [1], ne ho dedotto (nn. 4 e 5) $\mathrm{Rot}\,\lambda$, $\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\lambda$, $\mathrm{grad}\,\lambda$, $\mathrm{grad}\,\mathrm{K}\lambda$, nonchè le derivate rispetto al punto P (od al punto P_0) di λ, $\mathrm{K}\lambda$, $\lambda\mathbf{x}$, $\mathrm{K}\lambda\mathbf{x}$; per $\mathbf{x}$ vettore arbitrario.

1. Introducendo le solite dilatazioni σ, σ_0 caratterizzate dalle:

$$(a)\qquad \sigma = \frac{d\mathbf{N}}{dP} \ , \quad \sigma\mathbf{N} = 0 \ , \quad \sigma_0 = \frac{d\mathbf{N}_0}{dP_0} \ , \quad \sigma_0\mathbf{N}_0 = 0 \ ,$$

insieme all'isomeria vettoriale λ ad invariante terzo positivo ($\mathrm{I}_3\lambda = 1$) tale che:

$$\lambda\, dP = dP_0 \ , \quad \lambda\mathbf{N} = \mathbf{N}_0 \ ,$$

per ogni elemento dP; porremo ancora, per definizione:

$$[1]\qquad \nu = \sigma_0\lambda - \lambda\sigma \ .$$

Allora le (1) e (2) della mia Nota [cit. in (2)] si scrivono:

$$(1)\qquad d\lambda.\mathbf{N} = \nu.dP \ , \qquad (2)\qquad d\lambda.\mathbf{u} = \mathrm{H}(\nu\mathbf{u}, \mathbf{N}_0)\, dP_0 \ ,$$

essendo $\mathbf{u}$ un arbitrario vettore, funzione di P, del piano tangente ad S in P. Formule analoghe si hanno scambiando fra loro le due superficie S ed S_0; in generale per passare da una di queste formule alla corrispondente basta sostituire P, $\mathbf{N}$, $\mathbf{u}$, σ e λ rispettivamente con P_0, $\mathbf{N}_0$, $\mathbf{u}_0$, σ_0 e $\lambda_0 = \lambda^{-1} = \mathrm{K}\lambda$, e quindi ν con $-\mathrm{K}\nu = \sigma\mathrm{K}\lambda - \mathrm{K}\lambda.\sigma_0$. Nel seguito, pure omettendo spesso di scrivere materialmente queste formule, quando occorra si designeranno con gli stessi numeri di richiamo usati per le loro corrispondenti, affettati dall'indice 0.

Dalla 2ª e 4ª delle (a), per la [1] segue subito la proprietà:

$$[2]\qquad \nu\mathbf{N} = 0 \ , \quad \mathrm{K}\nu\mathbf{N}_0 = 0 \ ;$$

come pure, tenendo presente il teorema di commutazione (*A. V.*, I, pag. 32):

$$[3]\qquad \mathbf{N}_0 \times \nu\mathbf{x} = 0 \ , \quad \mathbf{N} \times \mathrm{K}\nu\mathbf{x} = 0 \ ,$$

(1) C. Burali-Forti, *Sulle derivate delle isomerie vettoriali* (Ibidem, vol. XXV (5ª), 1° sem. 1916, pp. 709-716). Vedi pure dello stesso Autore i lavori indicati nella mia Nota cit. in (2). Nel seguito dovremo ancora citare: C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale*, vol. I e II (Pavia, Mattei & C., 1912-13), che richiameremo brevemente con « *A. V.* ».

per $\mathbf{x}$ vettore arbitrario. Inoltre, moltiplicando a destra ed a sinistra la [1] per $K\lambda$, ovvero $K\nu$ per λ, essendo $\lambda . K\lambda = K\lambda . \lambda = 1$, si ha:

$$\lambda . K\nu . \lambda = \nu \quad , \quad K\lambda . \nu . K\lambda = K\nu , \tag{4}$$

le quali possono ancora scriversi sotto la forma:

$$\lambda . K\nu = \nu . K\lambda \quad , \quad K\lambda . \nu = K\nu . \lambda ; \tag{4'}$$

e siccome in ognuna di queste i due membri sono coniugati l'uno dell'altro, ne segue che $\lambda . K\nu$ e $K\lambda . \nu$ *sono dilatazioni*.

2. Qualunque sia il vettore $\mathbf{x}$, applicando le (1), (2) alle due sue componenti (normale e tangenziale) $\mathbf{x} \times \mathbf{N} . \mathbf{N}$, $\mathbf{x} - \mathbf{x} \times \mathbf{N} . \mathbf{N}$ e sommando, per la [2], il teorema di commutazione ed (*A. V.*, I, pag. 43 [2]), si ha

$$d\lambda . \mathbf{x} = \mathbf{x} \times \mathbf{N} . \nu dP - \mathrm{H}(\nu \mathbf{x} , \mathbf{N}_0)\, dP_0 = \mathrm{H}(\mathbf{N} , \nu dP)\, \mathbf{x} - \mathrm{H}(K\nu\, dP , \mathbf{N}_0)\, \mathbf{x} ,$$

da cui:

$$d\lambda = \mathrm{H}(\mathbf{N} , \nu\, dP) - \mathrm{H}(K\nu\, dP_0 , \mathbf{N}_0) = \nu \mathrm{H}(\mathbf{N} , dP) - \mathrm{H}(dP_0 , \mathbf{N}_0)\, \nu . \tag{5}$$

Da questa, per la (1) e l'analoga $(1)_0$, si ha pure subito:

$$d\lambda = d\lambda . \mathrm{H}(\mathbf{N} , \mathbf{N}) + \mathrm{H}(\mathbf{N}_0 , \mathbf{N}_0) . d\lambda = \mathrm{H}(\mathbf{N} , d\lambda \mathbf{N}) + \mathrm{H}(K d\lambda \mathbf{N}_0 , \mathbf{N}_0) . \tag{6}$$

L'omografia $d\lambda$, come somma di due diadi, *è degenere*, cioè $I_3\, d\lambda = 0$, mentre $I_2\, d\lambda$ si ha subito da una nota formula (*A. V.*, II, pag. 136 [12]); per $I_1\, d\lambda$ dalla [6] si ottiene (*A. V.*, I, pag. 28 [3] e pag. 32)

$$\begin{aligned} I_1\, d\lambda &= \mathbf{N} \times d\lambda\, \mathbf{N} + \mathbf{N}_0 \times dK\lambda . \mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \times dK\lambda\, \mathbf{N} + \lambda \mathbf{N} \times dK\lambda . \lambda \mathbf{N} = \\ &= \mathbf{N} \times (dK\lambda . K\lambda . \lambda + K\lambda . dK\lambda . \lambda)\, \mathbf{N} = \mathbf{N} \times dK\lambda^2 \mathbf{N}_0 = \mathbf{N}_0 \times d\lambda^2 \mathbf{N} , \end{aligned}$$

mentre dalla [5] si ricava similmente

$$I_1\, d\lambda = \mathbf{N} \times (\nu - K\lambda . K\nu . \lambda)\, dP = \mathbf{N} \times (1 - K\lambda^2)\, \nu\, dP ;$$

e quindi:

$$I_1\, d\lambda = \mathbf{N}_0 \times d\lambda^2\, \mathbf{N} = \mathbf{N} \times (1 - K\lambda^2)\, \nu\, dP , \tag{7}$$

$$I_2\, d\lambda = (\mathbf{N} \wedge K\nu dP_0) \times (\mathbf{N}_0 \wedge \nu dP) , \quad I_3\, d\lambda = 0 . \tag{8}$$

3. Dalla [5] per le (b), (b_0) e [4] si ricava (*A. V.*, I, pag. 43 [2]; pag. 28 [3])

$$\begin{aligned} d\lambda . K\lambda &= \mathrm{H}(\lambda \mathbf{N} , \nu\, dP) - \mathrm{H}(\lambda . K\nu . \lambda dP , \mathbf{N}_0) = \\ &= \mathrm{H}(\mathbf{N}_0 , \nu\, dP) - K\mathrm{H}(\mathbf{N}_0 , \nu dP) = 2\,[V\mathrm{H}(\mathbf{N}_0 , \nu\, dP)] \wedge = (\mathbf{N}_0 \wedge \nu dP) \wedge , \end{aligned}$$

ed operando a destra con λ, si ha:

$$d\lambda = (\mathbf{N}_0 \wedge \nu\, dP) \wedge \lambda \quad , \quad dK\lambda = -(\mathbf{N} \wedge K\nu\, dP_0) \wedge K\lambda . \tag{9}$$

Questa nuova espressione di $d\lambda$ permette di ottenere sotto altra forma $\mathrm{I}_1 d\lambda = \mathrm{I}_1 d\mathrm{K}\lambda$ (*A. V.*, I, pag. 42 [1]; pag. 49 [3]):

$$[7'] \qquad \mathrm{I}_1 d\lambda = -2(\mathrm{N}_0 \wedge \nu dP) \times \mathrm{V}\lambda = -2(\mathrm{N} \times \mathrm{K}\nu dP_0) \times \mathrm{V}\lambda\,;$$

e per il vettore e l'R di $d\lambda$ si ha (*A. V.*, I, pag. [42] [2], [3]; pag. 49 [3]):

$$[10] \qquad 2\mathrm{V}d\lambda = \mathrm{C}\lambda(\mathrm{N}_0 \wedge \nu dP) = \mathrm{CK}\lambda(\mathrm{N} \wedge \mathrm{K}\nu dP_0)$$

$$[11] \qquad \mathrm{R}d\lambda = \mathrm{H}(\mathrm{N}_0 \wedge \nu dP\,,\, \mathrm{N}_0 \wedge \nu dP)\lambda = \mathrm{H}(\mathrm{N} \wedge \mathrm{K}\nu dP_0\,,\, \mathrm{N}_0 \wedge \nu dP).$$

4. Il prof. Burali [loc. cit. (1), pp. 713-14] ha dimostrato che il differenziale di ogni isomeria vettoriale λ funzione del punto P, variabile in un campo continuo a tre dimensioni, è della forma:

$$(c) \qquad d\lambda = (\mu\, dP) \wedge \lambda \quad , \quad d\mathrm{K}\lambda = (\mu_1\, dP) \wedge \mathrm{K}\lambda = -(\mathrm{K}\lambda . \mu\, dP) \wedge \mathrm{K}\lambda\,,$$

e quindi nel caso nostro, in virtù delle [9], risulta:

$$(d) \qquad \mu = \mathrm{N}_0 \wedge \nu \quad , \quad \mu_1 = -\mathrm{K}\lambda . \mathrm{N}_0 \wedge \nu = -\mathrm{N} \wedge \mathrm{K}\nu . \lambda\,;$$

e con ciò le formule da [7'] a [15] ottenute dal Burali ci dànno subito altrettante proprietà per la nostra isomeria λ. Così per le [12], [13] [loc. cit. (1), pag. 713], essendo $\mathrm{V}(\mathrm{K}\lambda . \nu) = 0$ e quindi ricordando le [4], [4'] (*A. V.*, I, pag 23 [5]; pag. 42 [1])

$$\mathrm{C}(\mathrm{N} \wedge \mathrm{K}\lambda . \nu)\, \mathrm{K}\lambda = -\mathrm{N} \wedge \mathrm{K}\lambda . \nu . \mathrm{K}\lambda = -\mathrm{N} \wedge \mathrm{K}\nu\,,$$

si ottiene immediatamente (*A. V.*, I, pag. 42 [2]; pag. 44 [1]):

$$[12] \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{Rot}\,\lambda &= -\mathrm{C}(\mathrm{N}_0 \wedge \nu)\,\lambda = (2\mathrm{N}_0 \times \mathrm{V}\nu + \mathrm{N}_0 \wedge \nu)\,\lambda\,, \\ \mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\lambda &= -\mathrm{N} \wedge \mathrm{K}\nu\,, \end{aligned} \right.$$

$$[13] \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{grad}\,\lambda &= -\mathrm{C}(\lambda . \mathrm{K}\nu)\,\mathrm{N}_0\,, \\ \mathrm{grad}\,\mathrm{K}\lambda &= \mathrm{K}\lambda . \mathrm{C}\nu . \mathrm{N}_0 = \mathrm{I}_1\nu . \mathrm{N} - \mathrm{K}\nu . \mathrm{N}_0\,; \end{aligned} \right.$$

e con i cambiamenti indicati nel n. 1 si hanno le analoghe:

$$[12]_0 \qquad \mathrm{Rot}_{P_0}\,\lambda = \mathrm{N}_0 \wedge \nu \quad , \quad \mathrm{Rot}_{P_0}\,\mathrm{K}\lambda = \mathrm{C}(\mathrm{N} \wedge \mathrm{K}\nu)\,\mathrm{K}\lambda\,,$$

$$[13]_0 \qquad \mathrm{grad}_{P_0}\,\lambda = -\lambda\mathrm{CK}\nu\mathrm{N} \quad , \quad \mathrm{grad}_{P_0}\,\mathrm{K}\lambda = \mathrm{C}(\mathrm{K}\lambda . \nu)\,\mathrm{N}\,.$$

Similmente, dalle [14] o [14'] del Burali, per $\mathbf{x}$ vettore arbitrario funzione di P (o costante), si ha subito:

$$[14] \qquad \frac{d\lambda}{dP}\mathbf{x} = (\mathrm{N}_0 \wedge \nu\mathbf{x}) \wedge \lambda \quad , \quad \frac{d\mathrm{K}\lambda}{dP}\mathbf{x} = (\mathrm{N} \wedge \mathrm{K}\nu . \lambda\mathbf{x}) \wedge \mathrm{K}\lambda\,,$$

$$[14'] \qquad \frac{d\lambda}{dP}\mathbf{x} = \lambda(\mathrm{N} \wedge \mathrm{K}\nu . \lambda\mathbf{x}) \wedge \quad , \quad \frac{d\mathrm{K}\lambda}{dP}\mathbf{x} = \mathrm{K}\lambda(\mathrm{N}_0 \wedge \nu\mathbf{x}) \wedge\,;$$

(1)

Introducendo l'operatore iperomografico A (*assiale*), ponendo cioè col Burali [1] $\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}\wedge$, $\mathrm{A}(\alpha\mathbf{x}) = \mathrm{A}\alpha\mathbf{x} = (\alpha\mathbf{x})\wedge$, le [14′] si scrivono:

$$[14''] \qquad \frac{d\lambda}{dP} = \lambda . \mathrm{A}(\mathrm{N}\wedge \mathrm{K}\nu . \lambda) \quad , \quad \frac{d\mathrm{K}\lambda}{dP} = -\mathrm{K}\lambda . \mathrm{A}(\mathrm{N}_0 \wedge \nu) .$$

Infine dalle [15] del Burali, per le (*d*), si ottiene:

$$[15] \qquad \begin{cases} \dfrac{d(\lambda\mathbf{x})}{dP} = \lambda \dfrac{d\mathbf{x}}{dP} - (\lambda\mathbf{x})\wedge(\mathrm{N}_0\wedge\nu) , \\[2ex] \dfrac{d(\mathrm{K}\lambda\mathbf{x})}{dP} = \mathrm{K}\lambda \dfrac{d\mathbf{x}}{dP} + (\mathrm{K}\lambda\mathbf{x})\wedge(\mathrm{N}\wedge\mathrm{K}\nu . \lambda) . \end{cases}$$

5. Sottraendo dalle [15] ordinatamente le [14] si ha pure:

$$[16] \qquad \frac{d(\lambda\mathbf{x})}{dP} = \lambda\frac{d\mathbf{x}}{dP} + \frac{d\lambda}{dP}\mathbf{x} + \nu[\mathrm{N}\times\mathbf{x} - \mathrm{H}(\mathrm{N}, \mathbf{x})] ,$$

$$[17] \qquad \frac{d(\mathrm{K}\lambda\mathbf{x})}{dP} = \mathrm{K}\lambda\frac{d\mathbf{x}}{dP} + \frac{d\mathrm{K}\lambda}{dP}\mathbf{x} + \\ + \mathrm{K}\nu . \lambda[\mathrm{H}(\mathrm{N}_0, \mathbf{x}) - \mathrm{N}_0\times\mathbf{x}] - 2\mathrm{H}(\mathrm{V}\nu\wedge\mathbf{x}, \mathrm{N}) .$$

Posto infatti

$$\alpha = (\lambda\mathbf{x})\wedge(\mathrm{N}_0\wedge\nu) + (\mathrm{N}_0\wedge\nu\mathbf{x})\wedge\lambda ,$$

per $\mathbf{y}$ vettore arbitrario si ha

$$\alpha\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}\times\nu\mathbf{y} . \mathrm{N}_0 - \lambda\mathbf{x}\times\mathrm{N}_0 . \nu\mathbf{y} + \mathrm{N}_0\times\lambda\mathbf{y} . \nu\mathbf{x} - \nu\mathbf{x}\times\lambda\mathbf{y} . \mathrm{N}_0 ,$$

e poichè per le [4′] ed il teorema di commutazione è

$$\lambda\mathbf{x}\times\nu\mathbf{y} = \mathbf{x}\times\mathrm{K}\lambda . \nu\mathbf{y} = \mathbf{x}\times\mathrm{K}\nu . \lambda\mathbf{y} = \nu\mathbf{x}\times\lambda\mathbf{y} ,$$

risulta $-\alpha\mathbf{y} = [\mathbf{x}\times\mathrm{N} . \nu - \mathrm{H}(\mathrm{N}, \nu\mathbf{x})]\mathbf{y}$, donde la [16].

Similmente per essere in virtù delle [4′] e di note proprietà

$$\begin{aligned} &(\mathrm{K}\lambda\mathbf{x})\wedge(\mathrm{N}\wedge\mathrm{K}\nu . \lambda\mathbf{y}) + (\mathrm{N}\wedge\mathrm{K}\nu . \lambda\mathbf{x})\wedge\mathrm{K}\lambda\mathbf{y} = \\ &= \mathrm{K}\lambda\mathbf{x}\times\mathrm{K}\nu . \lambda\mathbf{y} . \mathrm{N} - \mathrm{N}\times\mathrm{K}\lambda\mathbf{x} . \mathrm{K}\nu . \lambda\mathbf{y} + \\ &+ \mathrm{N}\times\mathrm{K}\lambda\mathbf{y} . \mathrm{K}\nu . \lambda\mathbf{x} - \mathrm{K}\lambda\mathbf{y}\times\mathrm{K}\nu . \lambda\mathbf{x} . \mathrm{N} = \\ &= (\mathbf{x}\times\nu\mathbf{y} - \mathbf{y}\times\nu\mathbf{x})\mathrm{N} - \mathrm{N}_0\times\mathbf{x} . \mathrm{K}\nu . \lambda\mathbf{y} + \mathrm{H}(\mathrm{N}_0, \mathrm{K}\nu . \lambda\mathbf{x})\mathbf{y} , \end{aligned}$$

da cui (*A. V.*, I. pag. 23 [2]; pag. 43 [2]) segue la [17].

Il lettore può con i cambiamenti indicati nel n. 1, scrivere subito le formule analoghe delle [14], ..., [17].

[1] C. Burali-Forti, *Sopra alcuni operatori lineari vettoriali* (Atti R. Istit. Veneto, tomo LXXII, parte 2ª, 1912-13, pp. 265-276).

OSSERVAZIONE. — Per $\mathbf{x}\times\mathbf{N}=0$ ed applicando $\frac{d(\lambda\mathbf{x})}{dP}$ soltanto ai vettori $\mathbf{y}$ normali ad $\mathbf{N}$, il 2° membro della [16] opera sugli $\mathbf{y}$ come $\lambda\frac{d\mathbf{x}}{dP}+\frac{d\lambda}{dP}\mathbf{x}$, come deve avvenire perchè λ è, sulla superficie, una derivata rispetto a P.

Matematica. — *Derivazione intrinseca nel calcolo differenziale assoluto.* Nota II di U. CISOTTI, presentata dal Socio TULLIO LEVI-CIVITA [1].

2. Richiamo dalla precedente Nota [2] le formole (I'):

$$(\mathrm{I}')\qquad J_{r_1 r_2\ldots r_m r_{m+1}}=\frac{\partial J_{r_1 r_2\ldots r_m}}{\partial s_{r_{m+1}}}-\sum_1^m{}_l\sum_1^n{}_q\,\gamma_{r_l q r_{m+1}}\,J_{r_1 r_2\ldots r_{l-1} q r_{l+1}\ldots r_m},$$

che forniscono le prime derivate intrinseche degli invarianti $J_{r_1 r_2\ldots r_m}$. Per $m=2$ si ha, in particolare per un sistema doppio J_{ij}:

$$(10)\qquad J_{ijk}=\frac{\partial J_{ij}}{\partial s_k}-\sum_1^n{}_q\{\gamma_{iqk}J_{qj}+\gamma_{jqk}J_{iq}\}.$$

Applichiamo queste formole alla ricerca delle prime derivate intrinseche γ_{hijk} dei *coefficienti di rotazione di Ricci* γ_{hij}, che — come risulta dalle formole di definizione (3) — costituiscono appunto per ogni $h=1,2,\ldots,n$ un sistema doppio di invarianti. Si ottiene:

$$(11)\qquad \gamma_{hijk}=\frac{\partial\gamma_{hij}}{\partial s_k}-\sum_1^n{}_q(\gamma_{iqk}\gamma_{hqj}+\gamma_{jqk}\gamma_{hiq}).$$

Scambiando j con k si ottiene

$$\gamma_{hikj}=\frac{\partial\gamma_{hik}}{\partial s_j}-\sum_1^n{}_q(\gamma_{iqj}\gamma_{hqk}+\gamma_{kqj}\gamma_{hiq}),$$

e per sottrazione da (11), tenendo presenti le (3):

$$\gamma_{hij}+\gamma_{ihj}=0,$$

si ha:

$$\gamma_{hijk}-\gamma_{hikj}=\frac{\partial\gamma_{hij}}{\partial s_k}-\frac{\partial\gamma_{hik}}{\partial s_j}+$$

$$+\sum_1^n{}_q\{\gamma_{hiq}(\gamma_{qjk}-\gamma_{qkj})+\gamma_{qhk}\gamma_{qij}-\gamma_{qhj}\gamma_{qik}\};$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1918.

[2] Questi Rendiconti, vol, XXVII, pag. 387.