ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

« sia essa $f_k = (r_k, r_{k+1}, \dots r_q)$. Per questa, considerata come funzione « della u, esisterà un valore σ che rende $f_k(u) = u$ mentre non dà $f_i(u) = u$ « per alcun valore dell'indice i superiore a k. Allora la radice (β) è reale « se la base a è superiore od uguale a σ, non è reale se è $a < \sigma$ ».

12. Un'osservazione assai semplice mostra che fra due radici consecutive s_{r-1} ed s_r cadono infiniti valori speciali di u. Infatti, presa l'equazione

$$(\lambda) \qquad (r, 1, 1, \dots 1) = u,$$

dove è $r > 1$, questa, avendo il primo membro nelle condizioni del n. 9, ha una soluzione σ che è evidentemente compresa fra s_{r-1} ed s_r; questa soluzione è un valore speciale per u. E potendosi prendere arbitrariamente il numero delle cifre 1 in (λ), e la σ essendo diversa per due diverse tali equazioni, il numero dei valori speciali compresi fra s_{r-1} ed s_r viene dunque ad essere infinito.

Meccanica. — *ds^2 einsteiniani in campi newtoniani. III. Formule ausiliarie.* Nota del Socio T. Levi-Civita [1].

Ho raccolto in questa terza Nota considerazioni e sviluppi aventi ancora carattere preparatorio, in quanto trovano la loro principale, se non esclusiva, ragion d'essere nel sussidio che presteranno alla effettiva integrazione delle equazioni gravitazionali di Einstein in alcuno dei casi o sottocasi già classificati nella Nota II.

Circa il contenuto specifico rileverò che si tratta in primo luogo del passaggio da una forma fondamentale ad un'altra che ne differisce per un semplice fattore (trasformazione conforme). Ho assegnato le relazioni esplicite fra omologhe derivate covarianti (§ 1) e omologhi simboli di Riemann (§ 2). A dire il vero tali relazioni figurano già in una Nota del sig. Finzi pubblicata nel 1903 [2]; ma ho stimato opportuno ricavarle *ex novo* per comodità del lettore.

Nel § 3 ho indicato un processo di riduzione da $n+1$ a n variabili, di cui già mi sono valso (per $n = 3$) nel riferire al ds^2 spaziale (anzichè al ds'^2 quadridimensionale) le equazioni della statica einsteiniana. In sostanza si troveranno qui ripetute, per n qualunque, formule che già scrissi per $n = 3$, onde farne (§ 4) applicazione, per $n = 2$, al calcolo dei simboli di Ricci relativi ad una forma ternaria del tipo

$$d\sigma^2 + A^2\, dx_3^2$$

[1] Pervenuta all'Accademia l'11 ottobre 1918.

[2] *Le ipersuperficie a tre dimensioni che si possono rappresentare conformemente sullo spazio euclideo*, Atti del R. Istituto Veneto, T. LXII, pp. 1049-1062.

con $d\sigma$ (elemento lineare binario) ed A indipendenti da x_3. Si arriva ad espressioni di carattere invariantivo rispetto al $d\sigma$, la cui utilità si farà manifesta nelle Note successive.

1. — Trasformazione conforme e suoi effetti sulla derivazione covariante.

Sia

$$ds^2 = \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k \tag{1}$$

il quadrato di un elemento lineare in quante si vogliono variabili;

$$ds'^2 = e^{2\tau}\, ds^2. \tag{2}$$

Usando i soliti simboli per la metrica (1), designeremo con omologhi simboli accentati tutto ciò (coefficienti, coefficienti della forma reciproca, simboli di Christoffel e di Riemann, derivate covarianti, ecc.) che si riferisce alla metrica conforme (2). Così saranno

$$a'_{ik} = e^{2\tau}\, a_{ik}$$

i coefficienti del ds'^2;

$$a'^{(ik)} = e^{-2\tau}\, a^{(ik)}$$

i coefficienti della forma reciproca;

$$a'_{ik,j} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial a'_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial a'_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial a'_{ik}}{\partial x_j}\right) = e^{2\tau}\,(a_{ik,j} + \tau_k\, a_{ij} + \tau_i\, a_{jk} - \tau_j\, a_{ik})$$

i simboli di Christoffel di prima specie;

$$\begin{Bmatrix} i\,k \\ h \end{Bmatrix}' = \sum_{1}^{n}{}_{j}\, a'^{(hj)}\, a'_{ik,j} = \begin{Bmatrix} i\,k \\ h \end{Bmatrix} + \varepsilon_{ih}\,\tau_k + \varepsilon_{hk}\,\tau_i - a_{ik}\,\tau^{(h)} \tag{3}$$

$$(i\,,k\,,j\,,h = 1\,,2\,,\ldots\,,n)$$

quelli di seconda specie spettanti ad esso ds'^2. Ben si intende che con τ_i intendiamo le derivate (ordinarie, o, ciò che è lo stesso, covarianti) della funzione τ; con $\tau^{(h)} = \sum_{1}^{n}{}_{j}\, a^{(hj)}\,\tau_j$ gli elementi reciproci rispetto alla forma (1); infine con ε_{ih} lo zero o l'unità secondochè i due indici sono distinti o coincidono.

Ciò premesso, sia X_i un generico sistema semplice covariante. Se si assume come forma fondamentale la (2), si ha, per derivazione covariante, il sistema doppio

$$(X_i)'_k = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \sum_{1}^{n}{}_{h} \begin{Bmatrix} i\,k \\ h \end{Bmatrix}' X_h\,.$$

Analogamente, se si assume per forma fondamentale la (1), le corrispondenti derivate covarianti hanno le espressioni

$$X_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \sum_1^n{}_h \begin{Bmatrix} i k \\ h \end{Bmatrix} X_h .$$

Ne viene, badando alle (3),

$$(4) \qquad (X_i)'_k = X_{ik} - \tau_i X_k - \tau_k X_i + a_{ik} \sum_1^n{}_h \tau^{(h)} X_h ,$$

delle quali relazioni è materialmente visibile il comportamento covariante. Una loro immediata conseguenza si è l'identità dei rotori (dedotti da X_i con referenza alle due forme), cioè dei sistemi emisimmetrici

$$(X_i)'_k - (X_k)'_i \quad \text{e} \quad X_{ik} - X_{ki} .$$

Ove in particolare il sistema X_i sia costituito dalle derivate di una funzione $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, il sommatorio

$$\sum_1^n{}_h \tau^{(h)} X_h$$

si identifica col parametro differenziale misto $\nabla(\tau, V)$, preso, si intende, con referenza alla forma (1).

Posto ancora

$$V = V_0 e^\nu \quad (V_0 \text{ costante arbitraria}),$$

le (4), divise per V, assumono l'aspetto

$$(5) \qquad \frac{V'_{ik}}{V} = \nu_{ik} + \nu_i \nu_k - \tau_i \nu_k - \tau_k \nu_i + a_{ik} \nabla(\tau, \nu) .$$

Le (4) stesse si possono generalizzare considerando (anzichè un sistema semplice X_i) un sistema d'ordine qualunque m, $Y_{i_1 i_2 \dots i_m}$, e confrontando le derivate covarianti del sistema, prese una prima volta con referenza alla forma fondamentale (2), una seconda volta con referenza alla (1). Mi limiterò ai sistemi doppî Y_{jh}. Partendo dalle formole di definizione

$$(Y_{jh})'_k = \frac{\partial Y_{jh}}{\partial x_k} - \sum_1^n{}_i \left[\begin{Bmatrix} j k \\ i \end{Bmatrix}' Y_{ih} + \begin{Bmatrix} k h \\ i \end{Bmatrix}' Y_{ji} \right],$$

si ricavano le relazioni

$$(6) \quad (Y_{jh})'_k = Y_{jhk} - \tau_j Y_{kh} - \tau_h Y_{jk} - 2\tau_k Y_{jh} + a_{jk} \sum_1^n{}_i \tau^{(i)} Y_{ih} + a_{kh} \sum_1^n{}_i \tau^{(i)} Y_{ji} .$$

Poniamo $Y_{jh} = (X_j)'_h$, e formiamo le differenze

$$(X_j)'_{hk} - (X_j)'_{kh} .$$

Si ha

$$(X_j)'_{hk} - (X_j)'_{kh} = [(X_j)'_h]_k - [(X_j)'_k]_h + \tau_j [(X_h)'_k - (X_k)'_h] +$$
$$+ \tau_h (X_j)'_k - \tau_k (X_j)'_h + a_{jk} \sum_{1\,i}^{n} \tau^{(i)} (X_i)'_h - a_{jh} \sum_{1\,i}^{n} \tau^{(i)} (X_i)'_k ,$$

da cui, usando ancora le (4) e il loro corollario concernente l'identità dei rotori, dopo riduzioni materiali, risulta

$$(X_j)'_{hk} - (X_j)'_{kh} = X_{jhk} - X_{jkh} + X_k (\tau_{jh} - \tau_j \tau_h) - X_h (\tau_{jk} - \tau_j \tau_k) +$$
$$+ a_{jh} \left[\sum_{1\,i}^{n} X^{(i)} (\tau_{ik} - \tau_i \tau_k) + X_k \Delta\tau \right] - a_{jk} \left[\sum_{1\,i}^{n} X^{(i)} (\tau_{ih} - \tau_i \tau_h) + X_h \Delta\tau \right],$$

essendo

$$\Delta\tau = \nabla(\tau, \tau) = \sum_{1\,\rho}^{n} \tau^{(\rho)} \tau_\rho$$

il parametro differenziale di primo ordine della funzione τ, relativo alla forma (1).

Ove, nel secondo membro, si sostituisca ulteriormente $\sum_{1\,i}^{n} a_{ih} X^{(i)}$ al posto di X_h e $\sum_{1\,i}^{n} a_{ik} X^{(i)}$ al posto di X_k, si può ritenere la precedente relazione sotto la forma:

$$(7) \qquad (X_j)'_{hk} - (X_j)'_{kh} = X_{jhk} - X_{jkh} +$$
$$+ \sum_{1\,i}^{n} X^{(i)} [a_{ik} (\tau_{jh} - \tau_j \tau_h) - a_{ih} (\tau_{ik} - \tau_j \tau_k) + a_{jh} (\tau_{ik} - \tau_i \tau_k) -$$
$$- a_{jk} (\tau_{ih} - \tau_i \tau_h) + (a_{ik} a_{jh} - a_{ih} a_{jk}) \Delta\tau].$$

2. — Relazioni fra i simboli di Riemann. — Corollari. — Forme ternarie.

Le derivate terze covarianti di un generico sistema semplice X_i, prese con referenza ad un'assegnata forma fondamentale — sia per esempio la (1) — sono legate ai simboli di Riemann relativi a quella forma dalle ben note identità (già invocate anche nella Nota II)

$$(8) \qquad X_{jhk} - X_{jkh} = \sum_{1\,i}^{n} a_{ij,hk} X^{(i)} .$$

Se si assume per forma fondamentale la (2), con che, secondo la nostra convenzione, si debbono far apparire gli omologhi simboli accentati, queste identità (ove si tenga presente che $X'^{(i)} = e^{-2\tau} X^{(i)}$, assumono l'aspetto:

$$(9) \qquad (X_j)'_{hk} - (X_j)'_{kh} = e^{-2\tau} \sum_{1\,i}^{n} a'_{ij,hk} X^{(i)} .$$

In base ad esse e alle precedenti, le (7) (che devono sussistere per qualsiasi sistema $X^{(i)}$) porgono le relazioni, già segnalate dal sig. Finzi (nella Nota citata da principio),

$$(10)\quad e^{-2\tau}a'_{ij,hk} = a_{ij,hk} + a_{ik}(\tau_{jh} - \tau_j\tau_h) - a_{ih}(\tau_{jk} - \tau_j\tau_k) + \\ + a_{jh}(\tau_{ik} - \tau_i\tau_k) - a_{jk}(\tau_{ih} - \tau_i\tau_h) + (a_{ik}a_{jh} - a_{ih}a_{jk})\,\Delta\tau\,.$$

Va da sè che a queste relazioni si sarebbe potuto arrivare (in modo concettualmente più diretto, ma formalmente più laborioso) facendo capo alla definizione dei simboli di Riemann di seconda specie per mezzo di quelli di Christoffel, e sfruttando unicamente le (3).

Ove si ponga con Einstein

$$G_{ik} = \sum_{1}^{n}{}_{jh}\, a^{(jh)}\, a_{ij,hk}$$

e in conformità

$$G'_{ik} = \sum_{1}^{n}{}_{jh}\, a'^{(jh)}\, a'_{ij,hk}\,,$$

si ha dalle (10) $\Big[$badando alle identità $\sum_{1}^{n}{}_{h}\, a^{(jh)}\, a_{ih} = \varepsilon_{ij}\,,\ \sum_{1}^{n}{}_{jh}\, a^{(jh)}\, a_{jh} = n\,,$

$\sum_{1}^{n}{}_{jh}\, a^{(jh)}\,\tau_j\tau_h = \Delta\tau\,,\ \sum_{1}^{n}{}_{jh}\, a^{(jh)}\,\tau_{jh} = \Delta_2\tau\Big]$

$$(11)\quad G'_{ik} = G_{ik} + (n-2)(\tau_{ik} - \tau_i\tau_k) + a_{ik}\{\Delta_2\tau + (n-2)\,\Delta\tau\}\,.$$

Ne consegue, fra gli invarianti lineari

$$G' = \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a'^{(ik)}\, G'_{ik}\quad,\quad G = \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a^{(ik)}\, G_{ik}\,,$$

la relazione

$$(12)\quad e^{2\tau}G' = G + 2(n-1)\,\Delta_2\tau + (n-1)(n-2)\,\Delta\tau\,.$$

Per $n=3$, i simboli di Riemann a quattro indici si riducono sostanzialmente al sistema doppio G_{ik}; o piuttosto (con vantaggio per le eventuali interpretazioni geometriche) ai simboli di Ricci

$$\alpha_{ik} = G_{ik} - \tfrac{1}{2}\,G\,a_{ik}\ \text{[1]}.$$

Gli omologhi simboli spettanti alla forma (2) sono

$$\alpha'_{ik} = G'_{ik} - \tfrac{1}{2}\,G'\,a'_{ik} = G'_{ik} - \tfrac{1}{2}\,G'\,e^{2\tau}\,a_{ik}\,.$$

Si ha perciò, in base alle (11) e (12),

$$(13)\quad \alpha'_{ik} = \alpha_{ik} + \tau_{ik} - \tau_i\tau_k - a_{ik}\,\Delta_2\tau\,.$$

[1] Cfr. la Nota *Statica einsteiniana* in questi Rendiconti, vol. XXVI (1° sem. 1917), pag. 463.

3. — ABBASSAMENTO INVARIANTIVO DA $n+1$ VARIABILI AD n.

Sia

$$ds'^2 = A^2\, dx_0^2 + ds^2$$

una forma differenziale quadratica in $n+1$ variabili, con ds^2 forma generica in n variabili definita dalla (1), ed A indipendente da x_0 (al pari dei coefficienti del ds^2).

I coefficienti del ds'^2 sono manifestamente

$$\text{gli } a_{ik} \text{ del } ds^2 \ (i, k = 1, 2, \dots, n) \ ; \ a_{0i} = 0 \ (i > 0) \ ; \ a_{00} = A^2 .$$

Il loro determinante vale quindi

$$a' = a \,.\, A^2,$$

essendo a il discriminante della (1); donde gli elementi reciproci:

$$a'^{(ik)} = a^{(ik)} \ (i, k = 1, 2, \dots, n) \ ; \ a'^{(0i)} = 0 \ (i > 0) \ ; \ a^{(00)} = \frac{1}{A^2} .$$

Anche qui, come (salvo il diverso significato del ds'^2) nei precedenti paragrafi, contrassegneremo con accento tutto ciò che si riferisce alla metrica definita dal ds'^2, riservando la corrispondente notazione senza accento per gli elementi omologhi (eventualmente da limitarsi ai valori $1, 2, \dots, n$ degli indici) relativi al ds^2.

Con tale intesa, si trova subito, per i simboli di Christoffel di prima specie,

$$\begin{cases} a'_{ik,j} = a_{ik,j} \quad (i, k, j = 1, 2, \dots, n) ; \\ a'_{0i,k} = a'_{ik,0} = a'_{00,0} = 0 ; \\ a'_{0i,0} = \frac{1}{2} \dfrac{\partial A^2}{\partial x_i} = A A_i \ ; \ a'_{00,i} = - A A_i , \end{cases}$$

e per quelli di seconda:

$$(15) \qquad \begin{cases} \begin{Bmatrix} i\,k \\ h \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} i\,k \\ h \end{Bmatrix} \quad (i, k, h = 1, 2, \dots, n) ; \\ \begin{Bmatrix} 0\,i \\ k \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} i\,k \\ 0 \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} 0\,0 \\ 0 \end{Bmatrix}' = 0 ; \\ \begin{Bmatrix} 0\,i \\ 0 \end{Bmatrix}' = \dfrac{A_i}{A} , \ \begin{Bmatrix} 0\,0 \\ i \end{Bmatrix}' = - A A^{(i)} . \end{cases}$$

Ne viene, per le derivate seconde covarianti di una generica funzione $\nu(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

$$(16)\quad \begin{cases} \nu'_{ik} = \dfrac{\partial \nu_i}{\partial x_k} - \sum_0^n{}_h \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ h \end{matrix} \right\}' \nu_h = \nu_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n); \\ \nu'_{0i} = \dfrac{\partial \nu_0}{\partial x_i} - \sum_0^n{}_h \left\{ \begin{matrix} 0\,i \\ h \end{matrix} \right\} \nu_h = \dfrac{\partial \nu_0}{\partial x_i} - \dfrac{A_i}{A}\nu_0 = A \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{1}{A}\nu_0\right); \\ \nu'_{00} = \dfrac{\partial \nu_0}{\partial x_0} - \sum_0^n{}_h \left\{ \begin{matrix} 0\,0 \\ h \end{matrix} \right\}' \nu_h = \dfrac{\partial^2 \nu}{\partial x_0^2} + A\nabla(A, \nu). \end{cases}$$

Se poi si richiamano le formole di definizione delle G'_{ik} e le conseguenti loro espressioni in funzione dei simboli di seconda specie,

$$G'_{ik} = \sum_0^n{}_{jh} a'^{(jh)} a'_{ij,hk} = \sum_0^n{}_h \left\{ ih, hk \right\} =$$

$$= \sum_0^n{}_h \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \begin{matrix} i\,h \\ h \end{matrix} \right\}' - \frac{\partial}{\partial x_h} \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ h \end{matrix} \right\}' \right] + \sum_0^n{}_{hj} \left[\left\{ \begin{matrix} i\,h \\ j \end{matrix} \right\}' \left\{ \begin{matrix} k\,j \\ h \end{matrix} \right\}' - \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ j \end{matrix} \right\}' \left\{ \begin{matrix} j\,h \\ h \end{matrix} \right\}' \right],$$

si ricava, dopo facili riduzioni,

$$(17)\quad \begin{cases} G'_{ik} = G_{ik} + \dfrac{A_{ik}}{A} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n); \\ G'_{0i} = 0; \\ G'_{00} = A\,\Delta_2 A \ \text{(}^1\text{)}, \end{cases}$$

da cui in particolare

$$(18)\qquad G' = \sum_0^n{}_{ik} a'^{(ik)} G'_{ik} = G + 2\,\frac{\Delta_2 A}{A}.$$

4. — Complementi relativi alle forme ternarie.

Supponiamo $n = 2$, e sostituiamo l'indice 3 all'indice 0, con che il ds'^2 ternario ha l'espressione

$$ds^2 + A^2\, dx_3^2.$$

Per la forma binaria

$$ds^2 = \sum_1^2{}_{ik} a_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

(1) Queste formole (salvo lieve divario nelle notazioni e speciale riferimento a $n = 3$) si trovano anche nella Nota testè citata sulla *Statica einsteiniana*, pag. 460.

i simboli di Riemann di prima specie $a_{ij,hk}$ si annullano, oppure si riducono allo schema $a_{12,12}$; e si ha

$$a_{12,12} = a\mathrm{K},$$

rappresentando K la curvatura gaussiana del ds^2 ed a il discriminante.

Ne viene

$$\mathrm{G}_{ik} = \sum_{1}^{2}{}_{jh}\, a^{(jh)}\, a_{ij,hk} = a^{(\bar{i}\,\bar{k})}\, a_{i\bar{i},\bar{k}k},$$

designando $\bar{i}$ e $\bar{k}$ gli indici complementari di i e di k nella coppia $1, 2$: intendo dire che, per $i = 1$, $\bar{i} = 2$, e viceversa.

Dacchè

$$a^{(\bar{i}\,\bar{k})} = (-1)^{i+k}\frac{a_{ik}}{a}$$

e

$$a_{i\bar{i},\bar{k}k} = -(-1)^{i+k}\, a\mathrm{K},$$

rimane semplicemente

$$\mathrm{G}_{ik} = -\mathrm{K}\, a_{ik} \qquad (i, k = 1, 2),$$

donde

$$\mathrm{G} = \sum_{1}^{2}{}_{ik}\, a^{(ik)}\, \mathrm{G}_{ik} = -2\mathrm{K}.$$

Le G'_{ik} sono fornite dalle (17) (per $n = 2$ e con sostituzione di 3 a zero), e la G' dalla (18), che diviene

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{G}' = -\mathrm{K} + \frac{\Delta_2 \mathrm{A}}{\mathrm{A}}.$$

Dopo ciò si possono senz'altro esplicitare le espressioni (riferite al ds^2 binario e alla funzione associata A) dei simboli di Ricci

$$\alpha_{ik} = \mathrm{G}'_{ik} - \tfrac{1}{2}\mathrm{G}'\, a'_{ik}$$

relativi alla forma ternaria $ds'^2 = ds^2 + \mathrm{A}^2\, dx_3^2$. Si trova immediatamente

$$(19) \qquad \begin{cases} \alpha_{ik} = \dfrac{\mathrm{A}_{ik}}{\mathrm{A}} - \dfrac{\Delta_2\mathrm{A}}{\mathrm{A}}\, a_{ik} \qquad (i, k = 1, 2); \\ \alpha_{i3} = 0; \\ \alpha_{33} = \mathrm{A}^2\mathrm{K}, \end{cases}$$

nonchè, per la curvatura media,

$$\mathfrak{M} = \sum_{1\,ik}^{3} a'^{(ik)} \alpha_{ik} = -\tfrac{1}{2} G' = K - \frac{\Delta_2 A}{A}. \tag{20}$$

Essendo evidentemente

$$a'_{ik} = a_{ik} \quad (i, k = 1, 2) \quad ; \quad a'_{i3} = 0 \; , \; a'_{33} = A^2$$

i coefficienti del ds'^2, dalla considerazione della equazione cubica

$$\| \alpha_{ik} - \omega a'_{ik} \| = 0,$$

la quale definisce le curvature principali, apparisce tosto che una radice è

$$\omega_3 = K$$

e che le linee coordinate x_3 ($x_1 = \text{cost}$, $x_2 = \text{cost}$) sono le corrispondenti linee principali di curvatura.

Per individuare le altre due curvature principali ω_1, ω_2 (e subordinatamente le relative direzioni principali), si stacca dalla precedente equazione cubica il fattore $A^2(K - \omega)$, e rimane

$$\begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{A} - \left(\frac{\Delta_2 A}{A} + \omega\right) a_{11} & \frac{A_{12}}{A} - \left(\frac{\Delta_2 A}{A} + \omega\right) a_{12} \\ \frac{A_{21}}{A} - \left(\frac{\Delta_2 A}{A} + \omega\right) a_{21} & \frac{A_{22}}{A} - \left(\frac{\Delta_2 A}{A} + \omega\right) a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Esempio. — Per $A = \text{cost}$, la equazione testè scritta si riduce a

$$\omega^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

e quindi porge $\omega_1 = \omega_2 = 0$. Ne viene che, per un ds'^2 ternario della forma

$$ds^2 + dx_3^2,$$

due delle curvature principali sono nulle, e la terza, corrispondente alle giaciture $x_3 = \text{cost}$, coincide colla curvatura gaussiana K del ds^2 binario.