ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

Analisi. — *Sulle equazioni integrali.* Nota III di PIA NALLI, presentata dal Socio PINCHERLE [1].

12. La ricerca delle costanti caratteristiche soddisfacenti alla (13) si fonda su quanto passiamo ad esporre.

Supponiamo di avere trovato delle funzioni reali

$$\Gamma_1(s,t)\,,\ \Gamma_2(s,t)\,,\ldots \tag{18}$$

in numero finito o numerabile, soddisfacenti alle condizioni

$$\int_a^b \Gamma_n(v,s)\,\Gamma_m(v,t)\,dv = 0 \qquad (m \neq n) \tag{19}$$

ed una successione di costanti reali

$$\mu_1\,,\ \mu_2\,,\ldots.. \tag{20}$$

in modo che sia

$$(\mu_n - k(s))\,\Gamma_n(s,t) = \int_a^b K(s,v)\,\Gamma_n(v,t)\,dv\,, \tag{21}$$

$$(\mu_n - k(s))\,\Gamma_n(s,t) = \int_a^b \Gamma_n(v,s)\,\Gamma_n(v,t)\,dv\,. \tag{22}$$

Per esempio, quando è $U^{(1)} > 0$ ed è soddisfatta la (14) con $r=1$, si può formare la successione (18) con la sola funzione $\Gamma_1(s,t) = \sqrt{c^{(1)}}\,F^{(1)}(s,t)$ e la (20) con $\mu_1 = \sqrt{c^{(1)}}$. Quando non è soddisfatta la (14) per $r=1$, si può formare la (18) con le due funzioni

$$\Gamma_1(s,t) = \sqrt{c^{(1)}}\,H_1^{(1)}(s,t) \quad,\quad \Gamma_2(s,t) = -\sqrt{c^{(1)}}\,H_2^{(1)}(s,t)\,,$$

prendendo $\mu_1 = \sqrt{c^{(1)}}$, $\mu_2 = -\sqrt{c^{(1)}}$.

Se la (18) è formata da infinite funzioni la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \int_a^b \Gamma_n^2(s,t)\,ds\,dt$$

è convergente e non supera $\int_a^b \int_a^b K^2(s,t)\,ds\,dt$.

La successione delle somme parziali della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(s,t)$ *converge in media verso una funzione* $C_1(s,t)$.

[1] Pervenuta all'Accademia il 24 settembre 1918.

Siccome poi $\mu_1, \mu_2, \ldots$ sono costanti caratteristiche proprie relative a $K(s,t)$ e $k(s)$, si avrà per qualunque n $\mu_n^2 \leq c^{(1)}$: ne viene che per qualunque r la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{r-1} \Gamma_n(s,t)$ converge in media verso una funzione $C_r(s,t)$.

Poniamo

$$D_1(s,t) = K(s,t) - C_1(s,t) \tag{23}$$

e formiamo le iterate di $D_1(s,t)$, considerata come funzione di s, relativamente a $K(s,t)$ e $k(s)$, iterate che denotiamo con $D_2(s,t)$, $D_3(s,t)$, ... poniamo cioè

$$D_n(s,t) = k(s)\, D_{n-1}(s,t) + \int_a^b K(s,v)\, D_{n-1}(v,t)\, dv \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Si possono dimostrare le seguenti relazioni

$$D_n(s,t) = G_n^{(1)}(s,t) - C_n(s,t)$$

$$D_{\mu+\nu}(s,t) = k(s)\, D_{\mu+\nu-1}(s,t) + \int_a^b D_\mu(v,t)\, D_\nu(v,s)\, dv, \tag{24}$$

quest'ultima analoga alla (9) della Nota I.

Da questa si trae che se qualcuna delle $D_n(s,t)$ è nulla si ha $D_1(s,t)=0$ o $D_2(s,t) = 0$. Nel primo caso, siccome per la (22) si può porre

$$\Gamma_n(s,t) \sim \sum_{m=1}^{\infty} [\mu_n - k(t)]\, \psi_m^{(n)}(s)\, \psi_m^{(n)}(t),$$

le $\psi_m^{(n)}$ formando, al variare di m ed n, un sistema ortogonale, essendo $K(s,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(s,t)$, possiamo dire che $K(s,t)$ rientra nella forma (11) della Nota I.

Nel secondo caso, da

$$k(s)\, D_1(s,t) + \int_a^b D_1(v,s)\, D_1(v,t)\, dv = 0$$

si trae

$$D_1(s,t) \sim - \sum_{m=1}^{\infty} k(t)\, \varphi_m(s)\, \varphi_m(t),$$

le $\varphi_m(s)$ e le $\psi_m^{(n)}(s)$, quando si facciano variare m ed n, formano un sistema ortogonale.

Essendo $K(s,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(s,t) + D_1(s,t)$, $K(s,t)$ rientra ancora nella forma (11).

13. Se nessuna delle $D_n(s, t)$ è identicamente nulla, posto

$$V_n = \int_a^b \int_a^b D_n^2(s, t)\, ds\, dt$$

si ha, per la (4),

$$V_n = \int_a^b \int_a^b D_{n-1}(s, t)\, D_{n+1}(s, t)\, ds\, dt$$

e di qui $V_n^2 \leq V_{n-1} V_{n+1}$. Ponendo $d_n = \frac{V_n}{V_{n-1}}$ la successione delle d_n, limitata e crescente, per $n = \infty$ tende ad un limite d, e si ha poi $\lim_{n=\infty} \frac{V_n}{d^n} = V \geq 0$. La successione delle funzioni $\frac{D_{2n}(s, t)}{d^n}$ converge in media verso una funzione $D(s, t)$ per la quale si ha $\int_a^b \int_a^b D^2(s, t)\, ds\, dt = V$, quindi se è $V > 0$, $D(s, t)$ non è nulla e inversamente.

Dalla (24) si trae che è $V > 0$ se è quasi dapertutto $k^2(s) + \delta < d$ con $\delta > 0$.

Supposto $V > 0$, la $D(s, t)$, considerata come funzione di s, è fondamentale relativamente a $K^{(2)}(s, t)$ e $k^2(s)$, cioè si ha

$$d\, D(s, t) = k^2(s)\, D(s, t) + \int_a^b K^{(2)}(s, v)\, D(v, t)\, dv,$$

ed allora si possono dare due casi: in un primo caso si ha

$$\sqrt{d}\, D(s, t) = k(s)\, D(s, t) + \int_a^b K(s, v)\, D(v, t)\, dv, \tag{25}$$

la radice di d essendo presa con segno conveniente, ed allora è

$$\sqrt{d}\, D(s, t) = k(s)\, D(s, t) + \sqrt{d} \int_a^b D(v, s)\, D(v, t)\, dv.$$

Si potrà porre allora

$$\sqrt{d}\, D(s, t) \sim \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sqrt{d} - k(t) \right] \varphi_m(s)\, \varphi_m(t),$$

le $\varphi_m(s)$ formando un sistema ortogonale ed essendo funzioni fondamentali proprie relative a $K(s, t)$ e $k(s)$, corrispondenti alla costante $\sqrt{d}$. Inoltre si ha per qualunque n,

$$\int_a^b \Gamma_n(v, s)\, D(v, t)\, dv = 0$$

e cioè

$$\int_a^b \psi_r^{(n)}(s)\, \varphi_m(s)\, ds = 0\,,$$

qualunque sieno r, n ed m.

In un secondo caso la (25) non è soddisfatta, ed allora, ponendo

$$M_i(s, t) = \frac{1}{2} D(s, t) + \frac{(-1)^{i-1}}{2\sqrt{d}} \left[k(s)\, D(s, t) + \int_a^b K(v, s)\, D(v, t)\, dv \right]$$
$$(i = 1, 2)$$

si avrà

$$(-1)^{i-1} \sqrt{d}\, M_i(s, t) = k(s)\, M_i(s, t) + (-1)^{i-1} \sqrt{d} \int_a^b M_i(v, s)\, M_i(v, t)\, dv$$

e si potrà porre

$$(-1)^{i-1} \sqrt{d}\, M_i(s, t) \sim \sum_{m=1}^{\infty} \left[(-1)^{i-1} \sqrt{d} - k(t) \right] \varphi_m^{(i)}(s)\, \varphi_m^{(i)}(t)\,,$$

le $\varphi_m^{(i)}(s)$ formando un sistema ortogonale ed essendo funzioni fondamentali proprie relative a $K(s, t)$ e $k(s)$, corrispondenti alla costante $(-1)^{i-1}\sqrt{d}$. Inoltre si ha $\int_a^b M_1(v, s)\, M_2(v, t)\, dv = 0$, e per qualunque n,

$$\int_a^b \Gamma_n(v, s)\, M_i(v, t)\, dv = 0\,, \quad \text{cioè} \quad \int_a^b \psi_r^{(n)}(s)\, \varphi_m^{(i)}(s)\, ds = 0$$

qualunque sieno r, n ed m.

Si dimostra che se $\varphi(s)$ è una funzione fondamentale propria relativa alla costante μ, e se, qualunque sieno r ed n si ha $\int_a^b \psi_r^{(n)}(s)\, \varphi(s)\, ds = 0$, si ha $\mu^2 \leq d$.

Notiamo che le funzioni

$$\Gamma_1(s, t), \Gamma_2(s, t), \ldots \sqrt{d}\, D(s, t) \tag{26}$$

nel primo caso, e le funzioni

$$\Gamma_1(s, t), \Gamma_2(s, t), \ldots \sqrt{d}\, M_1(s, t), -\sqrt{d}\, M_2(s, t) \tag{27}$$

nel secondo, formano una successione analoga alla (18); la successione analoga alla (20) è nel primo caso $\mu_1, \mu_2, \ldots \sqrt{d}$, e nel secondo $\mu_1, \mu_2, \ldots \sqrt{d}, -\sqrt{d}$.

14. Premesso questo si osservi che se $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ sono costanti caratteristiche proprie distinte, soddisfacenti alle condizioni $\sigma_n^2 > k^2(s) + \delta_n$ con $\delta_n > 0$, se non sono in numero finito i loro valori assoluti ammettono un solo punto limite, e precisamente il punto l tale che l'insieme dei punti nei

quali è $|k(s)| > l$ è di misura nulla, mentre, qualunque sia $\varepsilon > 0$, l'insieme dei punti dove è $|k(s)| > l - \varepsilon$ è di misura non nulla. Ne viene che le σ_n si possono ordinare per modulo decrescente.

Supponiamo ora i termini della (20) in numero finito, n, e siano ordinati per modulo decrescente. Sia poi $\mu_n^2 > k^2(s) + \delta$ con $\delta > 0$ e $\mu_1^2 = c^{(1)}$, e supponiamo che tra μ_i e μ_{i+1} $(i = 1, 2, \ldots n-1)$ non cadano costanti caratteristiche proprie, ed ancora che se $\varphi(s)$ è una funzione fondamentale corrispondente a μ_i si abbia

$$(\mu_i - k(s))\, \varphi(s) = \int_a^b \Gamma_i(t, s)\, \varphi(t)\, dt .$$

Si ha allora $d < \mu_n^2$ *e condizione necessaria e sufficiente perchè esista almeno un'altra costante caratteristica propria* μ *relativa a* $\mathrm{K}(s, t)$ *e* $k(s)$ *soddisfacente alla* (13) *è che sia* $k^2(s) + \varepsilon < d$, *con* $\varepsilon > 0$.

Tra queste costanti ve ne saranno una o due di massimo valore assoluto, eguale a $|\sqrt{d}|$, secondochè è o non è soddisfatta la (25).

Nel primo caso, qualunque sia la funzione fondamentale $\varphi(s)$ corrispondente alla costante $\sqrt{d}$ si ha

$$\left(\sqrt{d} - k(s)\right) \varphi(s) = \sqrt{d} \int_a^b \mathrm{D}(t, s)\, \varphi(t)\, dt ,$$

e nel secondo, qualunque sia la funzione fondamentale $\varphi^{(i)}(s)$ corrispondente alla costante $(-1)^{i-1} \sqrt{d}$ si ha

$$\left((-1)^{i-1} \sqrt{d} - k(s)\right) \varphi^{(i)}(s) = (-1)^{i-1} \sqrt{d} \int_a^b \mathrm{M}_i(t, s)\, \varphi^{(i)}(t)\, dt .$$

In seguito, per mezzo delle funzioni (26) o per mezzo delle (27) si possono determinare le costanti (o la costante) caratteristiche di massimo valore assoluto che seguono $\pm \sqrt{d}$ e le corrispondenti funzioni fondamentali, e così via di seguito; in conclusione: si vengono a determinare tutte le costanti caratteristiche μ soddisfacenti alla (13), dopo avere determinato $c^{(1)}$ e $\mathrm{F}^{(1)}(s, t)$.