ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

Astronomia. — *Il problema dell'astrometria fotografica nel suo aspetto più generale.* Nota III di VITTORIO NOBILE, presentata dal Corrisp. V. CERULLI [1].

A rendere completa, nel senso geometrico, la soluzione del problema che c'interessa, resta ora soltanto, e si tratta di un semplice dettaglio, a mostrare come si possano agevolmente fissare in posizione e grandezza sulle singole lastre i poligoni che limitano le facce del poliedro. Basta perciò determinare le intersezioni mutue delle facce contigue, ciò che si ottiene facilmente dopo aver notato che le immagini delle stesse stelle, considerate come punti corrispondenti in due lastre successive, dànno luogo a due sistemi piani π e π' evidentemente omografici [2], perchè possono disporsi nello spazio in modo da risultare prospettivi. Le punteggiate corrispondenti sono dunque projettive: la retta richiesta si troverà cercando la coppia di punteggiate corrispondenti per la quale projettività anzidetta si riduce a una congruenza. Le due punteggiate rappresenteranno evidentemente le posizioni che viene a prendere, sulle lastre considerate, la retta d'intersezione dei due piani (nello spazio retta unita dei due sistemi prospettivi).

La omografia Ω fra i due piani si esprime così analiticamente, in un qualunque sistema di coordinate projettive, con relazioni lineari che porremo qui sotto la forma omogenea

$$
(5)\qquad \begin{aligned}
\varrho y_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\
\varrho y_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\
\varrho y_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3
\end{aligned}
$$

$$
(6)\qquad \begin{aligned}
\sigma x_1 &= A_{11} y_1 + A_{21} y_2 + A_{31} y_3 \\
\sigma x_2 &= A_{12} y_1 + A_{22} y_2 + A_{32} y_3 \\
\sigma x_3 &= A_{13} y_1 + A_{23} y_2 + A_{33} y_3
\end{aligned}
$$

dove sia

$$
\sigma = \frac{D}{\varrho} \quad , \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} ,
$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 16 settembre 1918.

[2] Per individuare la omografia basta conoscere le coordinate di 4 stelle comuni sulle due lastre, ma naturalmente nella pratica converrà di avvalersi di un numero ben maggiore di stelle e dedurre così, applicando il metodo dei minimi quadrati, i parametri della corrispondenza.

con D, modulo della sostituzione lineare (5), non nullo, e si indichi con $A_{i,j}$ l'aggiunto di $a_{i,j}$ in D.

Dette u_1, u_2, u_3 le coordinate projettive omogenee di una retta r del sistema π, avrà luogo per ogni punto della retta la relazione

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$

e detta r' la corrispondente di r in π' al punto all'infinito della r le cui coordinate sono proporzionali ad

$$u_2 \ , \ -u_1 \ , \ 0$$

corrisponderà sulla r', per le (5), il punto

$$a_{11} u_2 - a_{12} u_1 \ , \ a_{21} u_2 - a_{22} u_1 \ , \ a_{31} u_2 - a_{32} u_1$$

e questo punto andrà anch'esso all'infinito, cioè *la projettività definita dalla Ω su r ed r' sarà una similitudine*, se le coordinate della r verificano la relazione $a_{31} u_2 - a_{32} u_1 = 0$, ovvero se la retta passa pel punto all'infinito di coordinate

$$a_{32} \ , \ -a_{31} \ , \ 0$$

al quale corrisponde sulla r' del sistema π',

$$-A_{23} \ , \ A_{13} \ , \ 0 \ .$$

Della retta cercata è così nota la direzione. Per fissarla completamente bisognerà introdurre l'altra condizione che il rapporto di similitudine fra le punteggiate corrispondenti deve ridursi all'unità. Trattandosi di una condizione metrica converrà servirsi di un sistema cartesiano ordinario.

La omografia Ω può allora esprimersi con relazioni fratte del tipo

$$X = \frac{l_1 x + m_1 y + n_1}{l_3 x + m_3 y + 1} \ , \quad Y = \frac{l_2 x + m_2 y + n_2}{l_3 x + m_3 y + 1}$$

ovvero, dividendo i termini delle due frazioni per $-\sqrt{l_3^2 + m_3^2}$ dopo aver determinato i valori numerici dei coefficienti,

$$X = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\alpha x + \beta y - \gamma} \ , \quad Y = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\alpha x + \beta y - \gamma} \tag{7}$$

con γ necessariamente positivo ed esprimente in valore ed in segno la distanza della origine O alla retta

$$\alpha x + \beta y - \gamma = 0 \ . \tag{8}$$

Ciò equivale a scegliere come positivo il senso della normale alla retta (8) che va da O *verso* la retta e ad indicare con α e β i coseni direttori della normale così orientata.

Con tali notazioni e convenzioni la retta da noi cercata ha una equazione della forma:

(9) $$\alpha x + \beta y - p = 0$$

e la costante p, che si tratta ora unicamente di determinare, esprime in valore e segno la distanza della retta dall'origine, nel senso che i valori positivi o negativi di p corrisponderanno rispettivamente ai casi in cui le rette (8) e (9) si trovano, rispetto all'origine della stessa parte oppure da parte opposta.

Ciò posto, se indichiamo con m un punto generico della (9) e con la stessa lettera il segmento che separa m da una origine fissa sulla retta stessa in un senso determinato (p. es. quello che conduce da m_1 ad m_2) e poniamo

$$\Delta m = m_2 - m_1 \ , \ \Delta x = x_2 - x_1 \ , \ \Delta y = y_2 - y_1$$

e analogamente pei punti corrispondenti

$$\Delta \mathrm{M} = \mathrm{M}_2 - \mathrm{M}_1 \ , \ \Delta \mathrm{X} = \mathrm{X}_2 - \mathrm{X}_1 \ , \ \Delta \mathrm{Y} = \mathrm{Y}_2 - \mathrm{Y}_1$$

avremo che sulla (9) sarà

(10) $$\alpha \Delta x + \beta \Delta y = 0$$

$$\alpha x_1 + \beta y_1 - \gamma = \alpha x_2 + \beta y_2 - \gamma = p - \gamma$$

e quindi subito

(11) $$\Delta \mathrm{X} = \frac{a_1 \Delta x + b_1 \Delta y}{p - \gamma} = - \frac{\mathrm{C}_2 \Delta x}{\beta (p - \gamma)}$$

e scambiando a_1, b_1 con a_2, b_2

(12) $$\Delta \mathrm{Y} = \frac{\mathrm{C}_1 \Delta x}{\beta (p - \gamma)}$$

quando con C_1 e C_2 si intendano gli aggiunti di c_1 e c_2 nel determinante della trasformazione (7). Seguono immediatamente le eguaglianze

$$\beta \Delta m = \Delta x$$

$$\beta \Delta \mathrm{M} = \frac{\Delta x}{p - \gamma} \sqrt{\mathrm{C}_1^2 + \mathrm{C}_2^2}$$

delle quali la prima è esatta in valore ed in segno. Da queste eguaglianze si trae, dovendo essere $\Delta \mathrm{M} = \Delta m$,

(13) $$p - \gamma = \pm \sqrt{\mathrm{C}_1^2 + \mathrm{C}_2^2} \ .$$

Il segno del radicale si determina subito in base a semplici criterî geometrici, dopo aver notato, cioè, che essendo la (8) la retta limite della omografia (intersezione del piano (x, y) col piano condotto pel centro di prospettiva parallelamente all'altro) i punti corrispondenti dei due piani che provengono da punti *fisicamente* prospettivi nello spazio (cioè dalla stessa parte del centro di prospettiva), ovvero le immagini di quelle stelle che sono comuni alle due lastre, debbono cadere, sulla lastra considerata (x, y), tutti da una stessa parte della retta limite. E siccome le rette parallele corrispondenti ai due valori di p dati dalla (13) sono simmetriche rispetto alla (8) *già fissata nel piano*, non potrà sussistere alcuna ambiguità nei casi singoli; si sceglierà fra le due rette [1] quella che con la retta limite (8) comprende le stelle comuni alle due lastre.

Eseguita in modo analogo la determinazione degli altri lati del poligono e ripetuta l'operazione per tutte le altre facce del poliedro si avranno tutti gli elementi per condurre a termine la soluzione del problema con le equazioni dei sistemi (1), (2), (3) e (4).

Il lettore avrà notato come nulla si sia fin qui detto sulle correzioni di aberrazione e refrazione.

In generale osserviamo come una qualunque deformazione indotta nella configurazione stellare da una causa fisica *la cui azione non varii durante le operazioni necessarie ad ottenere le lastre occorrenti*, rimanga senza effetto sui valori delle costanti geometriche del nostro problema (distanza focale dello strumento e coordinate dei centri delle lastre), le quali sono, per il loro significato intrinseco, affatto indipendenti dalle direzioni delle stelle. Occorrerà occuparsi di quelle deformazioni solo nella seconda fase del processo di catalogazione: quando, cioè, noti quei parametri e rappresentata la sfera celeste *apparente*, si debba passare alla determinazione della *reale* configurazione prospettica delle stelle. Ciò vale in senso quasi assoluto per l'aberrazione, quando solo si possano organizzare le operazioni in modo da ottemperare alla condizione di impressionare le lastre formanti le facce del nostro poliedro nello stesso giorno o in giorni prossimi; potremo così evitare l'applicazione preliminare della correzione di aberrazione sulle singole lastre e solo introdurla in fine dei calcoli, quando sia fissato sulla sfera celeste l'apice del movimento orbitale terrestre corrispondente all'epoca media delle operazioni.

Per la refrazione bisognerà evidentemente applicare la correzione sulle lastre *prima* dei calcoli per la determinazione degli elementi del poliedro. Ciò potrà farsi agevolmente dopo un calcolo delle coordinate rettangolari dello zenit su ciascuna coppia di lastre contigue che si considera, calcolo che può effettuarsi o per via trigonometrica in base alla conoscenza approssimata della posizione dello strumento e della lastra, o meglio ancora cogli elementi delle sole lastre, esprimendo che sono omografici non i sistemi piani π e π', quali risultano immediatamente dalle immagini, ma quelli che si ottengono dopo che i punti di ciascuno di essi hanno subìto rispettivamente degli spostamenti verso due punti (x_0, y_0), (x_0', y_0'), che sono le immagini dello zenit sulle due lastre e le cui coordinate si determinano insieme ai parametri della omografia.

Questo secondo procedimento offre anche il vantaggio di condurre, incidentalmente, ad una revisione della teoria della refrazione e relative costanti.

[1] Se si considera il piano bisettore del diedro formato dalle facce considerate del poliedro (lastre) e si conduce dal centro O di prospettiva il piano normale al primo, le due rette secondo cui il secondo piano taglia quelli delle due lastre sono parallele alla retta di intersezione delle due facce e su di esse la prospettività col centro in O determina due punteggiate *inversamente eguali*. È appunto a tale coppia di rette che corrisponde l'altra soluzione, da noi scartata, fornita dalla (13).