ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI
pervenute all'Accademia durante le ferie del 1918.

(Ogni Memoria o Nota porta a piè di pagina la data d'arrivo)

Matematica. — *Sulle superficie le cui normali si distribuiscono in una serie* ∞^1 *di rigate applicabili sull'iperboloide rotondo.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI [1].

1. Del problema corrispondente all'enunciato nel titolo di questa Nota si conoscono già due ampie soluzioni particolari, ciascuna delle quali dipende da *due* funzioni arbitrarie.

La prima e più semplice soluzione corrisponde al caso che le ∞^1 rigate siano congruenti coll'iperboloide rotondo stesso. Di questo caso, ed anzi anche dell'altro più generale di un iperboloide rotondo variabile di forma, tratta un mio lavoro inserito nel tomo XXVI (serie 3ª) degli Annali di Matematica (1917).

La seconda e più interessante soluzione, fornita dal teorema di Chieffi, si ottiene nel modo seguente [2].

Si consideri una qualunque superficie S (non rigata) applicabile sull'iperboloide rotondo, e sopra di essa le ∞^1 geodetiche g deformate delle generatrici di un sistema. La congruenza (normale) formata dalle tangenti alle geodetiche g dà appunto una soluzione del nostro problema; e questo anzi in doppio modo (ciò che è una particolarità del caso attuale), poichè la congruenza si decompone, pel teorema di Chieffi, in *due* serie ∞^1 di rigate deformate dell'iperboloide, che si ottengono associandone i raggi lungo le asintotiche dell'uno o dell'altro sistema di S.

[1] Pervenuta all'Accademia il 16 ottobre 1918.
[2] Cfr. il volume III delle mie *Lezioni di geometria differenziale*, § 2.

Trattando nella presente Nota del problema generale, stabilisco il sistema di equazioni a derivate parziali da cui il problema dipende, il sistema (A) del n. 3, e ne deduco che la soluzione generale contiene *tre* funzioni arbitrarie essenziali. Essa è quindi assai più ampia delle particolari sopra ricordate, delle quali si esamina il modo come si deducono dalla generale. Ma anche nel caso più generale, come già in quello particolare corrispondente al teorema di Chieffi, si hanno metodi di trasformazione che permettono di dedurre da una soluzione iniziale nota infinite nuove. Queste sono le *trasformazioni* B_k delle deformate rigate dell'iperboloide, ed ancora qui il teorema di permutabilità permette di semplificare, nel noto modo, i metodi di trasformazione.

Osserviamo che qui si presenta spontanea una generalizzazione delle presenti ricerche sostituendo all'iperboloide rotondo ad una falda una qualunque *quadrica rigata*, dove saranno da utilizzare in simile modo le trasformazioni B_k, ma di questo mi riserbo di trattare in Note successive.

2. Suppongasi di avere una serie ∞^1 di rigate R deformate dell'iperboloide rotondo ad una falda di cui siano A, B i semiassi dell'iperbola meridiana e suppongasi inoltre che la congruenza costituita dalle generatrici delle R sia una congruenza *normale*.

Di una qualunque di queste rigate R consideriamo la linea Γ di stringimento che sarà, pel teorema di Laguerre, una *curva di Bertrand*, le cui due curvature, la flessione che indicheremo con $L = \frac{1}{\varrho}$ e la torsione $M = \frac{1}{T}$, saranno legate da una relazione lineare, scriviamo

$$a \operatorname{sen} c \, . \, L - a \cos c \, . \, M = 1 \, , \tag{1}$$

le due costanti a, c essendo legate ai semiassi A, B dalle formole

$$A = a \operatorname{sen} c \quad , \quad B = a \cos c \, .$$

Mantenendo per la curva Γ le consuete notazioni (*Lezioni*, vol. I, cap. I), si sa che i coseni di direzione $\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\nu}$ della curva $\bar{\Gamma}$ di Bertrand coniugata di Γ (avente le stesse normali principali di Γ) sono dati da

$$\bar{\lambda} = \alpha \operatorname{sen} c - \lambda \cos c \;,\; \bar{\mu} = \beta \operatorname{sen} c - \mu \cos c \;,\; \bar{\nu} = \gamma \operatorname{sen} c - \nu \cos c \, , \tag{2}$$

e la rigata R si forma conducendo per ogni punto di Γ il raggio nella direzione $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\nu})$ (Bioche).

Consideriamo ora la superficie, che diremo Σ, luogo delle ∞^1 curve Γ di Bertrand e riferiamola ad un sistema coordinato curvilineo (u, v) di cui le linee $v = \text{cost}$ siano le curve Γ stesse, e le $u = \text{cost}$ intercettino sulle Γ archi eguali, ciò che lascierà per ora arbitraria una linea iniziale di questo sistema p. es. la $u = 0$, scelta la quale fisseremo le rimanenti assumendo a parametro u *l'arco* delle Γ contato a partire dalla $u = 0$. Il parametro v resterà provvisoriamente indeterminato.

Le coordinate x, y, z del punto (u, v) di Σ, come pure i coseni delle tre direzioni principali delle curve Γ di Bertrand $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}$ risulteranno determinate funzioni delle variabili u, v e potremo scrivere per la superficie Σ le formole fondamentali del quadro:

$$
(3)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u} = \alpha &&, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = P\alpha + Q\xi + R\lambda \\
&\frac{\partial \alpha}{\partial u} = L\xi &&, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = r\xi - q\lambda \\
&\frac{\partial \xi}{\partial u} = -L\alpha - M\lambda &&, \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = p\lambda - r\alpha \\
&\frac{\partial \lambda}{\partial u} = M\xi &&, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = q\alpha - p\xi ,
\end{aligned}
\right.
$$

tralasciando le analoghe ottenute con permutazione circolare rispetto agli assi. In queste formole (delle quali quelle a sinistra sono le formole di Frenet per le curve Γ) figurano, oltre le due funzioni L, M, legate dalla (1), le tre rotazioni p, q, r e le tre traslazioni P, Q, R.

Scrivendo le condizioni d'integrabilità delle (3), si hanno per le rotazioni p, q, r le equazioni differenziali

$$
(4)\qquad \frac{\partial p}{\partial u} = Lq - \frac{\partial M}{\partial v} , \quad \frac{\partial q}{\partial u} = -(Lp + Mr) , \quad \frac{\partial r}{\partial u} = Mq + \frac{\partial L}{\partial v}
$$

e per le traslazioni P, Q, R le altre

$$
(5)\qquad \frac{\partial P}{\partial u} = LQ , \quad \frac{\partial Q}{\partial u} = r - LP - MR , \quad \frac{\partial R}{\partial u} = MQ - q .
$$

Ma ora dobbiamo introdurre in calcolo l'ulteriore condizione che la congruenza delle generatrici delle rigate R deve essere *normale*. Il raggio generico della congruenza parte dal punto (x, y, z) coi coseni di direzione

$$
X = \bar{\lambda} = \alpha \operatorname{sen} c - \lambda \cos c , \quad Y = \bar{\mu} = \beta \operatorname{sen} c - \mu \cos c ,
$$
$$
Z = \bar{\nu} = \gamma \operatorname{sen} c - \nu \cos c
$$

e la condizione di normalità, posto

$$
U = S X \frac{\partial x}{\partial u} \quad , \quad V = S X \frac{\partial x}{\partial v} ,
$$

si esprime con

$$\frac{\partial V}{\partial u} = \frac{\partial U}{\partial v} .$$

Ma si ha subito dalle (3) e (6)

$$U = \operatorname{sen} c \quad , \quad V = P \operatorname{sen} c - R \cos c ,$$

e però la detta condizione si scrive

$$\operatorname{sen} c \frac{\partial P}{\partial u} - \cos c \frac{\partial R}{\partial u} = 0 , \tag{7}$$

che per le (5) e per la (1) diventa

$$Q = - a q \cos c . \tag{8}$$

D'altra parte, integrando la (7), risulta

$$S X \frac{\partial x}{\partial v} = P \operatorname{sen} c - R \cos c = \psi(v) , \tag{9}$$

essendo $\psi(v)$ una funzione della sola v, ed ora se disponiamo convenientemente della linea iniziale $u = 0$ sopra Σ, che rimaneva arbitraria, possiamo semplificare le formole e dedurre una conseguenza geometrica notevole. Assumiamo per ciò la linea $u = 0$ in guisa che risulti ortogonale ai raggi della congruenza uscenti dai suoi punti [1], e dovremo avere $S X \frac{\partial x}{\partial v} = 0$ *per* $u = 0$. Ma allora la (9) dimostra che sarà identicamente $\psi(v) = 0$, e perciò tutte le linee $u = \text{cost}$ risulteranno, come la $u = 0$, ortogonali ai raggi della congruenza. Risulta di qui il teorema in vista:

Sulla nostra superficie Σ le linee ortogonali ai raggi della congruenza (alle generatrici delle rigate R*) intercettano archi eguali sulle curve Γ di Bertrand, linee di stringimento delle rigate* R.

3. Scelto il sistema coordinato (u , v) nel modo superiore la (9), essendo $\psi(v) = 0$, ci dà

$$R = \operatorname{tg} c \,.\, P , \tag{10}$$

e con questa e colla (8) risultano eliminate le due incognite Q, R; e sostituendo nelle equazioni differenziali (4), (5) coll'esprimere inoltre M per L dalla (1):

$$M = L \operatorname{tg} c - \frac{1}{a \cos c} ,$$

[1] Si noti che una tale linea è necessariamente distinta dalle $v = \text{cost}$, le quali tagliano i raggi della congruenza sotto l'angolo $\frac{\pi}{2} - c$ diverso da $\frac{\pi}{2}$.

otteniamo per le rimanenti 5 funzioni incognite

$$p\,,\,q\,,\,r\,,\,\mathrm{L}\,,\,\mathrm{P}$$

il sistema seguente:

$$(\mathrm{A})\quad\begin{cases}\dfrac{\partial p}{\partial u}=\mathrm{L}q-\operatorname{tg}c\,\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial v}\,,\quad \dfrac{\partial q}{\partial u}=\dfrac{r}{a\cos c}-\dfrac{p\cos c+r\,\mathrm{sen}\,c}{\cos c}\,,\\[2mm] \dfrac{\partial r}{\partial u}=\left(\mathrm{L}\operatorname{tg}c-\dfrac{1}{a\cos c}\right)q+\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial u}=-\,a\cos c\,.\,\mathrm{L}q\,,\quad a\mathrm{L}(p\cos c+r\,\mathrm{sen}\,c)+\dfrac{a\mathrm{L}-\mathrm{sen}\,c}{a\cos^2 c}\,\mathrm{P}=2r\,.\end{cases}$$

Ora dall'ultima, che è una relazione in termini finiti fra $\mathrm{L}\,,\mathrm{P}\,,p\,,r$, potremo trarre p. es. p in funzione delle rimanenti ed il sistema (A) si convertirà nelle quattro incognite

$$q\,,\,r\,,\,\mathrm{L}\,,\,\mathrm{P}$$

in un sistema differenziale del 1° ordine risoluto rispetto alle quattro derivate

$$\frac{\partial q}{\partial u}\,,\ \frac{\partial r}{\partial u}\,,\ \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial u}\,,\ \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial u}\,.$$

I teoremi generali d'esistenza assicurano che la soluzione generale dipende da quattro funzioni arbitrarie di v, e cioè da quelle a cui si riducono inizialmente $q\,,r\,,\mathrm{L}\,,\mathrm{P}$ per $u=0$. Ma di queste quattro funzioni arbitrarie una è soltanto apparente e dipende dall'arbitrarietà ancora lasciata al parametro v.

Così in definitiva: *La soluzione generale del problema proposto* ***dipende*** *da tre funzioni arbitrarie essenziali di una variabile.*

Come si caratterizzano entro la soluzione generale le due particolari indicate al n. 1? Per la prima, nella quale tutte le rigate R si riducono all'iperboloide stesso, e quindi le curve Γ ad altrettanti circoli di raggio $a\,\mathrm{sen}\,c$, basta porre nelle formole generali

$$\mathrm{L}=\frac{1}{a\,\mathrm{sen}\,c}\quad,\quad \mathrm{M}=0\,,$$

e le equazioni fondamentali per le funzioni incognite $p\,,q\,,\mathrm{P}$ si riducono alle tre seguenti

$$(11)\qquad \frac{\partial p}{\partial u}=\frac{q}{a\,\mathrm{sen}\,c}\quad,\quad \frac{\partial q}{\partial u}=-\frac{p}{a\,\mathrm{sen}\,c}\quad,\quad \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial u}=-\cot c\,.\,q\,,$$

mentre r si calcolerà da

$$r=p\cot c+\frac{\mathrm{P}}{a\,\mathrm{sen}\,c}$$

e soddisferà alla $\frac{\partial r}{\partial u} = 0$. L'integrazione delle (11) è immediata e proseguendo si avrebbero, sotto altra forma, i risultati già ottenuti nel t. XXVI degli Annali ed ivi interpretati geometricamente.

4. Volgiamoci ora a caratterizzare similmente la seconda delle soluzioni particolari fornita dal teorema di Chieffi.

Per questo cominciamo dall'osservare che del sistema differenziale (A) si può subito assegnare un integrale primo, poichè infatti l'espressione

$$\mathrm{P}(p \cos c + r \operatorname{sen} c) - a \cos^2 c \,.\, q^2$$

ha, identicamente nulla, in forza delle (A), la derivata rapporto ad u, e per ciò: *Il sistema differenziale* (A) *possiede l'integrale primo* (*quadratico*)

$$\mathrm{P}(p \cos c + r \operatorname{sen} c) - a \cos^2 c \,.\, q^2 = \mathrm{F}(v)\,, \tag{B}$$

dove F(v) *è una funzione della sola* v. Ed anzi si noti che la funzione F(v) resta effettivamente, nella soluzione generale, una funzione arbitraria, tali essendo i valori iniziali di p, q, r, P *per* $u = 0$.

Ora dimostreremo che: *la soluzione particolare corrispondente al caso di Chieffi è caratterizzata analiticamente dall'assumere nulla nell'integrale primo la funzione* F(v).

Per questo osserviamo in primo luogo che, nel caso di Chieffi, la congruenza è formata dalle tangenti alle geodetiche g, sulla superficie S deformata dell'iperboloide, che corrispondono alle generatrici di un sistema, e sulla superficie Σ, luogo delle linee di stringimento Γ, le linee secondo cui le sviluppabili formate dalle tangenti alle g tagliano Σ sono manifestamente *evolventi* delle g, e perciò ortogonali ai raggi della congruenza. Dunque: *nel caso di Chieffi le sviluppabili di un sistema della congruenza sono precisamente le* $u =$ cost.

Ora se dalle formole

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial u} = \alpha \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \mathrm{P}\alpha - a \cos c \,.\, q\xi + \mathrm{P} \operatorname{tg} c \,.\, \lambda \\ &\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial u} = \frac{\xi}{a} \quad , \quad \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial v} = -\cos c \,.\, q\alpha + (p \cos c + r \operatorname{sen} c)\,\xi - \operatorname{sen} c \,.\, q\lambda \end{aligned}\right.$$

si calcolano le quantità fondamentali di Kummer della congruenza [1], si trova

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{E} = \frac{1}{a^2}\,, \quad \mathrm{F} = \frac{p \cos c + r \operatorname{sen} c}{a}\,, \quad \mathrm{G} = q^2 + (p \cos c + r \operatorname{sen} c)^2 \\ &e = 0 \quad , \quad f = f' = -\cos c \,.\, q\,, \\ &\qquad\qquad g = -\left\{\frac{\mathrm{P}}{\cos c} + a \cos c\,(p \cos c + r \operatorname{sen} c)\right\} q\,. \end{aligned}\right.$$

[1] Cfr. *Lezioni*, vol. I, § 137 e sgg.

La condizione che le $u = \text{cost}$ formino uno dei due sistemi di sviluppabili si scrive

$$fG - gF = 0 ,$$

e calcolata coi valori precedenti diventa

$$P(p \cos c + r \operatorname{sen} c) - a \cos^2 c \,.\, q^2 = 0 .$$

Come si vede, nel caso di Chieffi si ha necessariamente $F(v) = 0$, ed ora proveremo che inversamente se $F(v) = 0$ siamo nel caso di Chieffi. Intanto se $F(v) = 0$ le rigate $u = \text{cost}$ della congruenza formano le sviluppabili di un sistema e noi consideriamo i corrispondenti spigoli di regresso e la prima falda focale S_1 della congruenza loro luogo. Se con x_1, y_1, z_1 indichiamo le coordinate del punto (u, v) di S_1, avremo

(12) $$x_1 = x + \varrho X \;,\; y_2 = y + \varrho Y \;,\; z_1 = z + \varrho Z ,$$

dove il valore dell'ascissa ϱ si avrà subito osservando che le derivate *rapporto a* v di x_1, y_1, z_1 debbono riuscire proporzionali a X, Y, Z; onde risulta

(13) $$\varrho = \frac{a \cos c \,.\, q}{p \cos c + r \operatorname{sen} c} .$$

Dopo ciò, calcolando l'elemento lineare ds_1 della S_1, proveremo che questa S_1 è applicabile sull'iperboloide, le sue geodetiche $u = \text{cost}$ essendo le deformate delle generatrici di un sistema.

Abbiamo

$$dx_1 = X\, d\varrho + dx + \varrho\, dX ,\ \text{ecc.}$$

e per ciò

(14) $$ds_1^2 = S\, dx_1^2 = d\varrho^2 + 2\, d\varrho\, S\, X\, dx + S\, dx^2 + 2\varrho\, S\, dx\, dX + \varrho^2\, S\, dX^2 .$$

Ora calcolando troviamo

$$S\, dx^2 = du^2 + 2\, P\, du\, dv + \left(\frac{P^2}{\cos^2 c} + a^2 \cos^2 c \,.\, q^2\right) dv^2$$

$$S\, dx\, dX = -2 \cos c \,.\, q\, du\, dv - \left\{\frac{P}{\cos c} + a \cos c\, (p \cos c + r \operatorname{sen} c)\right\} q\, dv^2$$

$$S\, dX^2 = \frac{du^2}{a^2} + 2\, \frac{p \cos c + r \operatorname{sen} c}{a}\, du\, dv + \left\{q^2 + (p \cos c + r \operatorname{sen} c)^2\right\} dv^2$$

$$S\, X\, dx = \operatorname{sen} c \,.\, du ,$$

e sostituendo nel secondo membro della (14), coll'aver riguardo al valore (13) d ϱ ed a valore di P

$$P = \frac{a \cos^2 c \,.\, q^2}{p \cos c + r \operatorname{sen} c} = \cos c \,.\, q\varrho ,$$

si vede che i termini in $du\,dv$ e dv^2 si elidono e resta pel ds_1^2 in coordinate ϱ, u la formola

$$ds_1^2 = d\varrho^2 + 2 \operatorname{sen} c\, du\, d\varrho + \left(\frac{\varrho^2}{a^2} + 1\right) du^2 .$$

Ma questa appartiene appunto all' iperboloide rotondo ad una falda, riferito ai paralleli $\varrho = \mathrm{cost}$ ed alle generatrici di un sistema $u = \mathrm{cost}$. Concludiamo quindi: *La soluzione particolare data dal teorema di Chieffi è caratterizzata analiticamente dal porre* $F(v) = 0$ *nell' integrale primo* (B); *geometricamente poi dalla circostanza che sulla superficie* Σ *le linee ortogonali ai raggi della congruenza corrispondono alle sviluppabili di un sistema.*

5. Ritorniamo ora al caso generale per dimostrare che anche in questo caso nelle trasformazioni B_k per le deformate rigate dell' iperboloide rotondo si ha un mezzo per dedurre da una soluzione nota del problema infinite nuove soluzioni.

In primo luogo stabiliamo l'esistenza della trasformazione *complementare*, che si ottiene senza alcun calcolo d' integrazione secondo il teorema seguente: *Se si ha una prima serie* ∞^1 *di rigate* R *applicabili sull' iperboloide rotondo e le cui generatrici formano una congruenza normale, una seconda tale serie si ottiene subito dalle loro rigate complementari* $\overline{R}$ (¹).

Per dimostrarlo ricordiamo (²) che la rigata $\overline{R}$ complementare di R si forma conducendo pei punti $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ della curva $\overline{\Gamma}$ di Bertrand coniugata di Γ i raggi coi coseni di direzione $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ coincidenti con quelli λ, μ, ν della binormale a Γ. Ora abbiamo

$$\bar{x} = x + a \operatorname{sen} c \,.\, \xi \,, \ \text{ecc.}$$

indi

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} &= (1 - a \operatorname{sen} c \,.\, L)\,\alpha - a \operatorname{sen} c \,.\, M\lambda \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} &= (P - a \operatorname{sen} c \,.\, r)\,\alpha - a \cos c \,.\, q\xi + (P \operatorname{tg} c + a \operatorname{sen} c \,.\, p)\,\lambda \end{aligned}\right.$$

E siccome $\overline{X} = \lambda$

$$\frac{\partial \overline{X}}{\partial u} = M\xi \quad , \quad \frac{\partial \overline{X}}{\partial v} = q\alpha - p\xi \,.$$

(¹) Indico di passaggio che il teorema vale anche pel caso in cui le rigate R siano applicabili sopra iperboloidi rotondi diversi, quando però sia lo stesso per tutti questi iperboloidi il momento delle loro generatrici rispetto all'asse.

(²) Cfr. *Lezioni*, vol. II, Nota I, pp. 573-576.

ne risulta

$$S\frac{\partial\overline{X}}{\partial u}\frac{\partial\overline{x}}{\partial v}=-a\cos c\,.\,Mq$$

$$S\frac{\partial\overline{X}}{\partial v}\frac{\partial\overline{x}}{\partial u}=(1-a\,\mathrm{sen}\,c\,L)\,q\,,$$

onde per la (1) le due espressioni ora scritte sono eguali, il che esprime appunto che le generatrici delle $\overline{R}$ formano una congruenza normale, come è asserito nell'enunciato del teorema.

È manifesto così che da ogni soluzione del nostro problema se ne ottiene subito, in termini finiti, una seconda mediante la trasformazione complementare, che è di sua natura involutoria.

Nelle generali trasformazioni B_k, che andiamo ora a stabilire, troveremo invece il modo di moltiplicare all'infinito le soluzioni del problema, partendo da una iniziale nota.

6. Volendo procedere colle formole stabilite nella presente Nota conviene ricordare che le trasformazioni B_k delle deformate rigate dell'iperboloide rotonda equivalgono perfettamente alle trasformazioni di Razzaboni [1] delle curve Γ di Bertrand che sono le linee di stringimento di queste deformate rigate.

Secondo le formole del § 23 della Memoria ora citata, applichiamo a ciascuna curva Γ di Bertrand ($v=\mathrm{cost}$) della superficie Σ una trasformazione B_σ, a costante σ, che la trasformi in una nuova curva Γ' di Bertrand della stessa famiglia; avremo così

$$x'=x+a\cos\sigma\left[\cos c\,\mathrm{sen}\,\varphi\,.\,\alpha+\cos\varphi\,.\,\xi+\mathrm{sen}\,c\,\mathrm{sen}\,\varphi\,.\,\lambda\right],\ \text{ecc.}\tag{15}$$

dove φ è una funzione di u, v, assoggettata per ora a verificare l'equazione di trasformazione [ibid. § 23, formola (64)]

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{L}{\cos c}-\frac{\mathrm{sen}\,c\,\mathrm{sen}\,\sigma}{a\cos c\,(\mathrm{sen}\,\sigma+\cos c)}-\frac{\cos\sigma}{a(\mathrm{sen}\,\sigma+\cos c)}\cos\varphi\,.\tag{I}$$

Quanto alla costante σ essa è del tutto arbitraria e soltanto dovremo supporre per il seguito

$$\mathrm{sen}^2\sigma\neq\cos^2 c\,.\tag{16}$$

Notiamo poi che i coseni di direzione X', Y', Z' della binormale alla coniugata $\overline{\Gamma}'$ di Γ' sono dati da

$$\begin{aligned}X'=(\mathrm{sen}\,\sigma\,\mathrm{sen}\,c+\cos\sigma\cos c\cos\varphi)\,\alpha-\\-\cos\sigma\,\mathrm{sen}\,\varphi\,.\,\xi+(\cos\sigma\,\mathrm{sen}\,c\cos\varphi-\mathrm{sen}\,\sigma\cos c)\,\lambda\,,\ \text{ecc.}\end{aligned}\tag{16}$$

[1] Cfr. i §§ 22, 23 della mia Memoria: *Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche rotonde.* Memorie della Società dei XL, tomo IV della serie III (1905).

e se pei punti di Γ' si tirano i raggi nella direzione (X', Y', Z'), questi formano una rigata R′ deformata dell'iperboloide e trasformata della complementare $\overline{R}$ della R mediante una certa B_k (vedi Mem. cit.). Ora domandiamo: a quali altre condizioni, oltre la (I), conviene assoggettare la funzione $\varphi = \varphi(u, v)$ affinchè le generatrici delle rigate R′ formino a loro volta una congruenza normale?

Per questo dovremo avere

$$\frac{\partial}{\partial u} SX' \frac{\partial x'}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} SX' \frac{\partial x'}{\partial u},$$

ossia

$$S \frac{\partial X'}{\partial u} \frac{\partial x'}{\partial v} = S \frac{\partial X'}{\partial v} \frac{\partial x'}{\partial u}.$$

Eseguendo i calcoli sulle (15), (16) e riducendo opportunamente, troviamo che la condizione da aggiungere alla (I) è la seguente:

$$(\mathrm{I}^*) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \left\{ \frac{P \cos\sigma}{a \cos c (\operatorname{sen}^2\sigma - \cos^2 c)} - \frac{\operatorname{sen}\sigma \cos\sigma (p \cos cp + r \operatorname{sen} c)}{\operatorname{sen}^2\sigma - \cos^2 c} \right\} \cos\varphi +$$

$$+ \frac{q \cos c}{\operatorname{sen}\sigma - \cos c} \operatorname{sen}\varphi - \left\{ \frac{P \operatorname{sen} c}{a \cos c (\operatorname{sen}^2\sigma - \cos^2 c)} + \frac{\operatorname{sen} c \operatorname{sen}^2\sigma + \cos c \cos^2\sigma r}{\operatorname{sen}^2\sigma - \cos^2 c} \right\}.$$

Le due equazioni simultanee (I), (I*) per la funzione incognita φ formano, come si verifica, un sistema completamente integrabile, che nella incognita $\Lambda = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi$ assume la solita formola di Riccati.

Fissata la costante σ, se si integra la detta equazione di Riccati deduciamo così dalla serie nota di rigate R deformate dell'iperboloide una semplice infinità di tali nuove serie, a congruenze di generatrici normali.

Osserviamo poi che sussiste anche in questo caso il *teorema di permutabilità* con tutte le sue conseguenze che permettono di semplificare i metodi di trasformazione.

Notiamo da ultimo che se la serie ∞^1 iniziale di deformate rigate R dell'iperboloide offre il caso particolare di Chieffi, lo stesso accade per tutte le nuove serie che se ne derivano per trasformazioni B_k.