ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

2° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

Meccanica. — *ds^2 einsteiniani in campi newtoniani.* IV. *Il sottocaso* B_2): *Riduzione delle equazioni differenziali.* Nota del Socio T. LEVI-CIVITA [1].

La precedente Nota III fu, per così dire, di preparazione generica; questa sarà di preparazione specifica alla deduzione di una classe di integrali. Si tratta del sottocaso B_2) [cfr. Nota II], il più semplice, dopo quello elementare (o galileiano) in cui lo spazio resta addirittura euclideo. Dalle condizioni caratteristiche di B_2) scende (§§ 1-2) che lo spazio è atteggiato a varietà normale di Bianchi con due curvature principali ω_1 e ω_2 eguali tra loro, talchè (siccome la curvatura media si annulla in ogni caso) si ha

$$\omega_1 = \omega_2 = -\frac{1}{2}\omega,$$

designando ω la terza curvatura principale. Il quadrato dell'elemento lineare è (§ 3) riducibile alla forma

$$dl^2 = e^{2\tau}(d\sigma^2 + dx_3^2),$$

dove $d\sigma$ rappresenta un elemento lineare binario (di cui anche i coefficienti sono indipendenti da x_3), e la funzione τ è legata alla velocità della luce $V = V_0 e^{\nu}$ (V_0 costante di omogeneità) dalla relazione $\nu = \tau + \zeta$, con ζ funzione della sola x_3; inoltre $e^{-3\tau}$ differisce da ω per un fattore costante.

Si potrebbe cercare di sfruttare tutti questi risultati simultaneamente procedendo a diretta riduzione e integrazione delle equazioni gravitazionali intrinseche, secondo il criterio indicato a § 4. Ma si richiederebbero calcoli poco istruttivi e artifici non spontanei. Ho preferito pertanto riprendere *ab initio* le equazioni della statica einsteiniana, cercandone le soluzioni per cui il dl^2 ha la forma indicata e $\tau = \nu + \zeta$ (senza far intervenire ipotesi concernenti la curvatura). In base a tali condizioni addizionali, le equazioni si trasformano con procedimento sistematico rivolto alla separazione delle variabili (§§ 5-6), applicando le formule della Nota precedente. Vien fatto così di sostituire, come forma fondamentale, il $d\sigma^2$ binario all'originario dl^2, e le espressioni che ne risultano per le curvature principali mostrano a posteriori che le soluzioni in questione sono tutte e sole le B_2) cercate.

Per ragione di spazio, mi sono arrestato a questo punto, rimettendo alle prossime Note la discussione del sistema ridotto che non si presenta ancora sotto forma immediatamente integrabile.

[1] Pervenuta all'Accademia l'11 ottobre 1918.

1. — Semplificazione delle condizioni di integrabilità corrispondenti al sottocaso B₂).

Ricordiamo — con riferimento alle Note precedenti e in particolare alla II [1] per simboli e formule — che il sottocaso B_2) è contraddistinto dall'annullarsi di

$$\delta_3 = \omega_2 - \omega_1 \quad ; \quad \gamma_1 = \gamma_{231} \quad , \quad \gamma_2 = \gamma_{312} \, .$$

La prima condizione esprime che sono eguali due delle curvature principali. Siccome la curvatura media $\mathfrak{M} = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ si annulla in ogni caso, così le tre curvature principali $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ si possono esprimere per mezzo di una sola funzione ω (del posto) sotto la forma

$$\omega_1 = -\frac{1}{2}\omega \quad , \quad \omega_2 = -\frac{1}{2}\omega \quad , \quad \omega_3 = \omega \, . \tag{1}$$

In una tale metrica (prescindendo dal caso particolare in cui ω si riduca ad una costante) assumono evidentemente posto cospicuo le superficie $\omega = \text{cost.}$ (luogo dei punti in cui lo spazio si presenta egualmente incurvato) e le loro traiettorie ortogonali che chiameremo, come è naturale, *linee di pendenza* (delle curvature).

Delle tre direzioni principali di curvatura è univocamente determinata soltanto quella corrispondente ad ω, cioè [Nota II, § 4] la 3, che si dirà *assiale*; le altre due sono unicamente sottoposte alla condizione di essere perpendicolari tra loro e alla 3. Chiameremo naturalmente *linee assiali* quelle definite dalle direzioni assiali 3, e *congruenza assiale* la [3], formata dalle linee assiali. La relativa anormalità $\gamma_{312} - \gamma_{321}$ si annulla in causa di $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Perciò la congruenza assiale taglia ortogonalmente una famiglia di superficie, che gioverà assumere come superficie coordinate $x_3 = \text{cost.}$ Va notato altresì che (annullandosi separatamente γ_{312} e γ_{321}) sussiste la relazione

$$\gamma_{312} + \gamma_{321} = 0 \, . \tag{2}$$

Premesso questo, introduciamo nelle condizioni di integrabilità [(IV) della Nota II]

$$\frac{d\omega_k}{dl_i} + (\omega_i - \omega_k)\,\gamma_{kik} + \frac{dv}{dl_i}(\omega_k - \omega_j) = 0 \, , \tag{IV}$$

[1] Cfr. Nota I a pp. 307-317 del vol. XXVI (2° semestre 1917); Nota II a pp. 3-12 del vol. XXVII (1° semestre 1918); Nota III a pp. 183-191 di questo stesso volume (2° semestre 1918).

in cui i, k, j rappresentano indici *distinti*, le determinazioni (1) delle curvature principali.

Anzitutto, per $k = 1$ o 2, $j = 3$ (e quindi $i = 2$ ovvero 1 rispettivamente) si hanno le due equazioni

$$(\mathrm{IV}_a) \qquad \frac{d\omega}{dl_i} + 3\omega \frac{d\nu}{dl_i} = 0 \qquad (i = 1, 2).$$

Cogli stessi valori di k, ma $i = 3$ (e quindi j eguale rispettivamente a 2 ovvero a 1) risulta

$$(\mathrm{IV}_b) \qquad \frac{d\omega}{dl_3} - 3\omega\gamma_{k3k} = 0 \qquad (k = 1, 2).$$

Infine, per $k = 3$, $i = 1$ o 2 (e quindi $j = 2$ o 1 rispettivamente), si ricava

$$\frac{d\omega}{dl_i} - {}^3/_2\, \omega\gamma_{3i3} + {}^3/_2\, \omega \frac{d\nu}{dl_i} = 0 \qquad (i = 1, 2),$$

che, unite alle precedenti, esauriscono le (IV). Quest'ultimo gruppo, eliminandone le $\frac{d\nu}{dl_i}$ per mezzo delle (IV_a), può essere scritto

$$(\mathrm{IV}_c) \qquad \frac{d\omega}{dl_i} - 3\omega\gamma_{3i3} = 0.$$

2. — Interpretazioni geometriche. Riferimento ad un sistema triplo ortogonale.

L'ipotesi $\omega = 0$ implicherebbe, in virtù delle (1), l'annullarsi di tutte e tre le curvature principali; si tratterebbe pertanto di spazio euclideo, e si ricadrebbe nel caso galileiano B_3), già esaurito nella Nota II (§ 7). Va quindi ritenuto $\omega \neq 0$, ed è lecito porre

$$(3) \qquad \omega = \omega_0\, e^{-3\tau},$$

designando con ω_0 una curvatura costante (non nulla, ma *a priori* arbitraria) che si introduc per ragione di omogeneità, onde poter risguardare l'esponenziale e con esso l'esponente τ quale un puro numero. Tale è — ricordiamolo — anche ν, legato alla velocità V della luce dalla posizione [(2) della Nota II]

$$V = V_0\, e^{\nu} \ (^1).$$

(¹) A vero dire, nella Nota II, la costante moltiplicativa V_0 (affatto inessenziale perchè non compare nelle equazioni differenziali) era stata designata con c. Siccome si suole attribuire a c il significato specifico di velocità della luce in assenza d'ogni circostanza perturbatrice, così evito d'ora innanzi di adoperare la stessa lettera per una semplice costante di omogeneità, che può benissimo non avere [come per es. vedremo nella Nota V, § 4] la detta interpretazione fisica.

Per il semplice fatto che ω non si annulla, segue dalle (IV_b)

$$\gamma_{311} = \gamma_{322}, \tag{4}$$

la quale, associata a (2), sta ad esprimere che la congruenza assiale [3] è isotropa, ossia può, in infiniti modi, risguardarsi costituita dalle intersezioni di due famiglie di superficie ortogonali fra loro [1]. Due tali famiglie, unitamente alla $x_3 = \text{cost.}$, formano un sistema triplo ortogonale, talchè, assumendole come superficie coordinate $x_1 = \text{cost.}$, $x_2 = \text{cost.}$, il quadrato dell'elemento lineare dello spazio ha necessariamente la forma

$$dl^2 = H_1^2\, dx_1^2 + H_2^2\, dx_2^2 + H_3^2\, dx_3^2 .$$

Abbiamo già osservato a § 1 che ogni terna trirettangola di direzioni fra cui figuri quella assiale può essere risguardata come principale. *Perciò in particolare è lecito considerare come terna principale di curvatura quella costituita dalle linee coordinate di un qualsiasi sistema triplo ortogonale cui appartenga la famiglia* $x_3 = \text{cost.}$ Così intanto risulta che ogni varietà del tipo B_2) è normale nel senso di Bianchi, e quindi rientra nel tipo B_1) [Nota II, § 6], di cui però costituisce [in virtù della condizione addizionale $\delta_3 = 0$, ossia delle (1)] una classe speciale. Ed è ben giustificato il considerarla a parte, tanto più che B_2) si integra, mentre non si saprebbe forse affrontare B_1) nella sua generalità.

3. — Forma finita sotto cui giova ritenere le condizioni di integrabilità.

Ricordiamo che le linee coordinate di un sistema triplo ortogonale costituiscono tre congruenze normali, per cui le γ con tre indici distinti sono nulle, e le altre si riducono allo schema γ_{ikk}. Queste si esprimono, per mezzo dei coefficienti H del dl^2 riferito al sistema triplo, sotto la forma

$$\gamma_{ikk} = \frac{d\mathfrak{h}_k}{dl_i} \qquad (i \neq k),$$

essendo

$$H_k = e^{\mathfrak{h}_k} .$$

(1) Cfr. Ricci, *Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque*, nelle Memorie di questa Accademia, ser. V, vol. II, 1896, pp. 31 e 44. La denominazione « congruenza isotropa » ricorre però soltanto nella successiva mia Nota *Sulle congruenze di curve*, in questi Rendiconti, vol. VIII (2° sem. 1899), pag. 243. Le proprietà differenziali delle congruenze, e in particolare delle congruenze isotrope, ivi riferite all'ordinario spazio euclideo, sussistono anche in una varietà a tre dimensioni di natura metrica qualunque.

Con queste espressioni delle γ, ove si elimini anche ω per mezzo della (3), i tre gruppi (IV_a), (IV_b), (IV_c) divengono rispettivamente

$$(IV'_a) \qquad \frac{d\nu}{dl_i} = \frac{d\tau}{dl_i} \qquad (i = 1, 2);$$

$$(IV'_b) \qquad \frac{d\mathfrak{h}_i}{dl_3} = \frac{d\tau}{dl_3};$$

$$(IV'_c) \qquad \frac{d\mathfrak{h}_3}{dl_i} = \frac{d\tau}{dl_i}.$$

Tali equazioni vanno notate perchè si prestano a diretta combinazione colle equazioni gravitazionali [sotto la forma (I^*), (II^*) della Nota II], combinazione che sarebbe richiesta dal primo dei procedimenti di integrazione di cui sarà fatto cenno nel § seguente. Ma importa anche più l'osservare che, sostituendo ad ogni dl_i la sua espressione $H_i\, dx_i$, si attribuisce alle suddette equazioni la forma equivalente

$$\frac{\partial \nu}{\partial x_i} = \frac{\partial \tau}{\partial x_i} \quad ; \quad \frac{\partial \mathfrak{h}_i}{\partial x_3} = \frac{\partial \tau}{\partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial \mathfrak{h}_3}{\partial x_i} = \frac{\partial \tau}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2).$$

L'effettiva integrazione del primo gruppo porge

$$(IV''_a) \qquad \nu = \tau + \zeta,$$

designando ζ una funzione *a priori* arbitraria *della sola* x_3.

Dal secondo gruppo, tenuto presente che $H_i = e^{\mathfrak{h}_i}$, si ricava

$$(IV''_b) \qquad H_i = e^{\tau}\, \mathcal{H}_i \qquad (i = 1, 2),$$

le $\mathcal{H}_i$ dipendendo *soltanto da* x_1, x_2.

Infine il terzo gruppo equivale a

$$H_3 = e^{\tau}\, \chi$$

con χ funzione della sola x_3. Ma si può sempre rendere $\chi = 1$, eseguendo un semplice cambiamento di parametro, sostituendo cioè alla variabile x_3 una sua opportuna funzione. Adottato questo nuovo parametro, che per semplicità seguiteremo a chiamare x_3, si ha

$$(IV''_c) \qquad H_3 = e^{\tau};$$

ossia $\mathfrak{h}_3 = \tau$.

In virtù delle (IV''_b) e (IV''_c), il nostro dl^2 assume l'aspetto

$$e^{2\tau}(\mathcal{H}_1^2\, dx_1^2 + \mathcal{H}_2^2\, dx_2^2 + dx_3^2).$$

Si noti che, per essere $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ funzioni di x_1, x_2 non ulteriormente vincolate (dalle equazioni di cui ci occupiamo), $\mathcal{H}_1^2 dx_1^2 + \mathcal{H}_2^2 dx_2^2$ costituisce un generico $d\sigma^2$ binario.

Possiamo pertanto riassumere le condizioni di integrabilità come segue:

$$dl^2 = e^{2\tau} dl'^2 = e^{2\tau}(d\sigma^2 + dx_3^2), \tag{5}$$

con $d\sigma$ elemento lineare binario (a coefficienti indipendenti da x_3), ciò che sostituisce le (IV_b'') e (IV_c'');

$$\nu = \tau + \zeta \tag{6}$$

con ζ funzione della x_3, ciò che riproduce la (IV_a''); *infine τ è legata ad ω, ossia alle curvature principali* $(\omega_1 = \omega_2 = -\frac{1}{2}\omega)$ *del dl^2, dalla equazione* (3); *le x_3* $(x_1 = \text{cost.}\ ,\ x_2 = \text{cost.})$ *sono linee assiali* (cfr. § 1).

4. Doppio modo di impostare la integrazione. Preferibilità del secondo.

Conseguite ormai sotto forma assai maneggevole le condizioni di integrabilità relative al sottocaso B_2), si può ricorrere, per l'integrazione delle corrispondenti equazioni gravitazionali, a due distinti criterî:

1°. Far sistema delle equazioni intrinseche (I*), (II*) della Nota II colle condizioni di integrabilità (IV_a'), (IV_b'), (IV_c'), riferendo il dl^2 ad un sistema triplo che rientri nel tipo (5), e semplificando poi ulteriormente di mano in mano che se ne presenta l'opportunità, in modo da rendere immediata taluna integrazione e giungere infine ad un sistema ridotto, in cui figurano esplicitamente derivate ordinarie, al posto delle intrinseche.

Il calcolo condotto per questa via mi è riuscito discretamente laborioso e poco perspicuo, sicchè reputo superfluo intrattenermivi, proponendomi di sviluppare invece il criterio

2°. Le condizioni di integrabilità esigono che il dl^2 spaziale e ν (legata alla velocità della luce dalla relazione $V = V_0 e^{\nu}$) abbiano le forme rispettive (5) e (6). Orbene, si riprendono le originarie equazioni gravitazionali (I), (II), e si cercano quelle loro particolari soluzioni, che verificano anche (5) e (6).

Le trasformazioni covarianti su cui appositamente richiamai l'attenzione nella precedente Nota III consentono di caratterizzare queste soluzioni con spontaneità ed eleganza. Il sottocaso B_2) vi è certo compreso. A posteriori risulterà che esso è proprio costituito da tutte e sole le dette soluzioni.

5. — Trasformazioni suggerite dalla forma (5) del dl^2.

Le derivate seconde covarianti V_{ik} di una generica funzione V, prese con referenza ad un assegnato dl^2, si sanno riportare ad un dl'^2 che ne differisce per il fattore $e^{2\tau}$. Essendo precisamente

$$dl^2 = e^{2\tau}\, dl'^2 ,$$

basta invocare le formule (5) della precedente Nota III, *scambiandovi le lettere accentate con quelle non accentate*. Si ha così

$$\frac{V_{ik}}{V} = \nu'_{ik} + \nu_i \nu_k - \tau_i \nu_k - \tau_k \nu_i + a'_{ik} \nabla'(\tau, \nu) \tag{7}$$

$$(V = V_0 e^\nu \; ; \; i, k = 1, 2, 3),$$

il secondo membro andando riferito alla forma dl'^2.

L'analogo riporto dei simboli di Ricci α_{ik} dà luogo alle formule [(13) della citata Nota, con identica avvertenza circa gli accenti]

$$\alpha_{ik} = \alpha'_{ik} + \tau'_{ik} - \tau_i \tau_k - a'_{ik} \Delta'_2 \tau . \tag{8}$$

A noi interessa il dl'^2 che figura nella (5), cioè

$$dl'^2 = d\sigma^2 + dx_3^2 .$$

Stando così le cose, è possibile ed opportuno esprimere ulteriormente le ν'_{ik} e α'_{ik} con riferimento alla forma binaria $d\sigma^2$. A ciò provvedono le formule (16) e (19) della Nota citata, in cui si ponga $A = 1$. Tali formule divengono in conformità

$$\nu'_{ik} = \nu_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3) , \tag{9}$$

$$\alpha'_{ik} = \alpha'_{i3} = 0 \quad (i, k = 1, 2) \; ; \; \alpha'_{33} = K : \tag{10}$$

le ν_{ik} $(i, k = 1, 2)$ si possono risguardare come derivate covarianti rispetto al $d\sigma^2$ binario; ν_{i3} e ν_{33} si identificano colle derivate seconde ordinarie $\dfrac{\partial^2 \nu}{\partial x_i \partial x_3}$; $\dfrac{\partial^2 \nu}{\partial x_3^2}$; e K rappresenta la curvatura gaussiana del $d\sigma^2$.

6. — Combinazione delle precedenti relazioni e della (6).

A ν si può sostituire dappertutto la sua espressione (6), con che

$$\nu_i = \tau_i \quad (i = 1, 2) \quad , \quad \nu_3 = \tau_3 + \zeta' ,$$

l'apice apposto ad una funzione di un solo argomento designando derivata rispetto a quell'argomento.

Così facendo, le (7), combinate colle (9), e le (8), combinate colle (10), dànno

$$(7')\quad \begin{cases} \dfrac{V_{ik}}{V} = \tau_{ik} - \tau_i\tau_k + a_{ik}\nabla'(\tau, \tau+\zeta) \ ; \ \dfrac{V_{i3}}{V} = \tau_{i3} - \tau_i\tau_3 \ ; \\ \dfrac{V_{33}}{V} = \tau_{33} - \tau_3^2 + \zeta'' + \zeta'^2 + \nabla'(\tau, \tau+\zeta) \ ; \end{cases}$$

$$(8')\quad \begin{cases} \alpha_{ik} = \tau_{ik} - \tau_i\tau_k - a_{ik}\Delta_2'\tau \quad ; \quad \alpha_{i3} = \tau_{i3} - \tau_i\tau_3 \ ; \\ \alpha_{33} = K + \tau_{33} - \tau_3^2 - \Delta_2'\tau \ , \end{cases}$$

gli indici i e k potendo in queste formule assumere i valori 1 *e* 2.

Giova rilevare subito che, essendo i coefficienti della forma reciproca alla (5)

$$a^{\star(ik)} = e^{-2\tau}\, a^{(ik)} \quad (i, k = 1, 2) \quad ; \quad a^{\star(i3)} = 0 \quad ; \quad a^{\star(33)} = e^{-2\tau} \ ,$$

dove le $a^{(ik)}$ spettano (quali elementi reciproci) al $d\sigma^2$ binario, le (8′) dànno la curvatura media $\mathfrak{M}$ del dl^2 spaziale sotto la forma

$$(11)\quad \mathfrak{M} = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a^{\star(ik)}\, \alpha_{ik} = e^{-2\tau}\{K - 2(\Delta_2'\tau - \Delta'\tau) - 3\Delta'\tau\} \ .$$

7. — Riduzione delle equazioni gravitazionali.

Introduciamo le espressioni (7′) e (8′) nelle

$$(\mathrm{II})\qquad \alpha_{ik} + \frac{V_{ik}}{V} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

che, assieme alla

$$(\mathrm{I})\qquad \mathfrak{M} = 0 \ ,$$

costituiscono il sistema da integrare. Si hanno in conformità i tre gruppi

$$(\mathrm{II}_a)\qquad 2(\tau_{ik} - \tau_i\tau_k) + 2\,a_{ik}\,e^\tau J = 0 \qquad (i, k = 1, 2),$$

$$(\mathrm{II}_b)\qquad 2(\tau_{i3} - \tau_i\tau_3) = 0 \ ,$$

$$(\mathrm{II}_c)\qquad K + 2(\tau_{33} - \tau_3^2) + \zeta'' + \zeta'^2 + 2\,e^\tau J = 0 \ ,$$

dove J è determinato dalla posizione

$$(12)\qquad 2\,e^\tau J = -\Delta_2'\tau + \Delta'(\tau, \tau+\zeta) \ .$$

Dacchè si ha identicamente (per $i, k = 1, 2, 3$)

$$(13)\qquad \frac{\partial e^{-\tau}}{\partial x_i} = -e^{-\tau}\tau_i \quad , \quad (e^{-\tau})_{ik} = -e^{-\tau}(\tau_{ik} - \tau_i\tau_k),$$

le (II_b) equivalgono a

$$\frac{\partial^2 e^{-\tau}}{\partial x_i \, \partial x_3} = 0 \qquad (i = 1\,, 2)\,,$$

che si integrano a vista e porgono

$$e^{-\tau} = \xi(x_1\,, x_2) + \eta(x_3)\,, \tag{14}$$

ξ ed η dipendendo esclusivamente dagli argomenti indicati.

Con ciò, ove si tenga conto che i parametri differenziali accentati si riferiscono alla forma $dl'^2 = d\sigma^2 + dx_3^2$ e quelli non accentati al $d\sigma^2$ binario, si ha tosto dalle (13) e dalla definizione (sotto una forma qualsiasi) dei parametri suaccennati:

$$\left\{\begin{aligned} & e^{-2\tau}\,\Delta'\tau = \Delta' e^{-\tau} = \Delta\xi + \eta'^2\,, \\ & e^{-2\tau}\,\nabla'(\tau\,, \tau + \zeta) = e^{-2\tau}(\Delta'\tau + \tau_3\zeta') = \Delta\xi + \eta'^2 - \eta'\zeta' e^{-\tau}\,, \\ & e^{-\tau}(\Delta_2'\tau - \Delta'\tau) = -\,\Delta_2' e^{-\tau} = -\,\Delta_2\xi - \eta''\,. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

La (12) può così essere scritta

$$2\,\mathrm{J} = e^{-\tau}(-\,\Delta_2'\tau + \Delta'\tau + \tau_3\zeta') = \Delta_2\xi + (\eta'' - \eta'\zeta')\,, \tag{12'}$$

mentre le (II_a), moltiplicando per $-\frac{1}{2}e^{-\tau}$, divengono

$$\xi_{ik} - a_{ik}\,\mathrm{J} = 0 \qquad (i\,, k = 1\,, 2)\,.$$

Di qua si trae in primo luogo, moltiplicando per $a^{(ik)}$ e sommando,

$$\Delta_2\xi - 2\,\mathrm{J} = 0\,. \tag{12''}$$

Il confronto colla (12′) porge quindi

$$\eta'' - \eta'\zeta' = 0\,; \tag{16}$$

inoltre, col valore (12″) di J, risultano le equazioni (di secondo ordine)

$$\xi_{ik} - \tfrac{1}{2}\,\Delta_2\xi\, a_{ik} = 0 \qquad (i\,, k = 1\,, 2)\,, \tag{17}$$

di cui è manifesto il carattere invariante di fronte al $d\sigma^2$ binario.

Le (16) *e* (17) (nella prima delle quali intervengono unicamente funzioni di x_3, mentre nelle altre c'è dipendenza esclusiva da $x_1\,, x_2$) *prendono il posto delle* (II_a). *La* (14) (che è addirittura in termini finiti) *sostituisce opportunamente le* (II_b).

Resta da tener conto delle (II_c) e (I), mettendovi in evidenza $\mathrm{K}, \xi, \eta, \zeta$. La (II_c) moltiplicata per $e^{-\tau}$, in base alle (13), (14) e (12″), si scrive

$$(\mathrm{K} + \zeta'' + \zeta'^2)\, e^{-\tau} - 2\eta'' + \Delta_2\xi = 0\,. \tag{18}$$

Quanto alla (I), badando alla espressione (11) di $\mathfrak{M}$, le (15) le attribuiscono l'aspetto

$$(19)\qquad K e^{-2\tau} + 2(\Delta_2 \xi + \eta'')\, e^{-\tau} - 3(\Delta\xi + \eta'^2) = 0 .$$

Ecco l'ultima equazione da ritenere per formarne sistema colle (14), (16), (17), (18).

8. — Espressione delle curvature principali. Verificazione di appartenenza al tipo B).

Riservo alle prossime Note l'integrazione del sistema così specificato, e termino preparandomi le curvature principali dei dl^2 soddisfacenti al sistema stesso. Se ne desume tra altro che essi rientrano necessariamente nel tipo B_2), sicchè il nostro procedimento dà tutte e sole le soluzioni di questo tipo.

Per caratterizzare le curvature principali, basta naturalmente (come già a § 4 della Nota precedente) ricorrere all'equazione di terzo grado, che complessivamente le definisce,

$$\| \alpha_{ik} - \omega\, a_{ik} \| = 0 :$$

ben si intende che a_{ik} e α_{ik} vanno ora riferite alla metrica (5).

Dacchè, in virtù delle (8') e (II_b), le α_{i3} $(i = 1, 2)$ si annullano, e così pure [attesa l'espressione (5) del dl^2] le a_{i3}, mentre $a_{33} = e^{2\tau}$, si presenta nel primo membro della precedente equazione il fattore $\alpha_{33} - \omega e^{2\tau}$, determinandosi così la radice

$$\omega = e^{-2\tau}\, \alpha_{33} ,$$

la quale corrisponde evidentemente alle giaciture $x_3 = \text{cost.}$

L'espressione (8') di α_{33}, tenendo conto delle (13), (14) e (15), attribuisce ad ω la seguente forma esplicita

$$(20)\qquad \omega = K e^{-2\tau} + \Delta_2 \xi\, e^{-\tau} - (\Delta\xi + \eta'^2) .$$

D'altra parte, per $i, k = 1, 2$, le (8'), in virtù delle (14), (15) e (17), dànno

$$\alpha_{ik} = - e^{\tau} \xi_{ik} - a_{ik} \Delta'_2 \tau = - \left(\tfrac{1}{2} \Delta_2 \xi \,.\, e^{\tau} + \Delta'_2 \tau\right) a_{ik} \qquad (i, k = 1, 2) .$$

C'è dunque proporzionalità fra le α_{ik} e le a_{ik}, e perciò le due ulteriori radici ω_1 e ω_2 della precedente equazione cubica sono eguali tra loro. Siccome la somma $\mathfrak{M} = \omega_1 + \omega_2 + \omega$ si annulla, si ha senz'altro

$$\omega_1 = \omega_2 = - \tfrac{1}{2}\, \omega ,$$

rimanendo così accertato il comportamento delle curvature, che contraddistingue il sottocaso B_2).