ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

Osservazione. — Per $\mathbf{x} \times \mathbf{N} = 0$ ed applicando $\frac{d(\lambda \mathbf{x})}{dP}$ soltanto ai vettori $\mathbf{y}$ normali ad $\mathbf{N}$, il 2° membro della [16] opera sugli $\mathbf{y}$ come $\lambda \frac{d\mathbf{x}}{dP} + \frac{d\lambda}{dP}\mathbf{x}$, come deve avvenire perchè λ è, sulla superficie, una derivata rispetto a P.

Matematica. — *Derivazione intrinseca nel calcolo differenziale assoluto.* Nota II di U. Cisotti, presentata dal Socio Tullio Levi-Civita [1].

2. Richiamo dalla precedente Nota [2] le formole (I'):

$$\text{(I')} \qquad J_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1}} = \frac{\partial J_{r_1 r_2 \ldots r_m}}{\partial s_{r_{m+1}}} - \sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_q \gamma_{r_l q r_{m+1}} J_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m},$$

che forniscono le prime derivate intrinseche degli invarianti $J_{r_1 r_2 \ldots r_m}$. Per $m = 2$ si ha, in particolare per un sistema doppio J_{ij}:

$$\text{(10)} \qquad J_{ijk} = \frac{\partial J_{ij}}{\partial s_k} - \sum_1^n{}_q \{ \gamma_{iqk} J_{qj} + \gamma_{jqk} J_{iq} \}.$$

Applichiamo queste formole alla ricerca delle prime derivate intrinseche γ_{hijk} dei *coefficienti di rotazione di Ricci* γ_{hij}, che — come risulta dalle formole di definizione (3) — costituiscono appunto per ogni $h = 1, 2, \ldots, n$ un sistema doppio di invarianti. Si ottiene:

$$\text{(11)} \qquad \gamma_{hijk} = \frac{\partial \gamma_{hij}}{\partial s_k} - \sum_1^n{}_q (\gamma_{iqk} \gamma_{hqj} + \gamma_{jqk} \gamma_{hiq}).$$

Scambiando j con k si ottiene

$$\gamma_{hikj} = \frac{\partial \gamma_{hik}}{\partial s_j} - \sum_1^n{}_q (\gamma_{iqj} \gamma_{hqk} + \gamma_{kqj} \gamma_{hiq}),$$

e per sottrazione da (11), tenendo presenti le (3):

$$\gamma_{hij} + \gamma_{ihj} = 0,$$

si ha:

$$\gamma_{hijk} - \gamma_{hikj} = \frac{\partial \gamma_{hij}}{\partial s_k} - \frac{\partial \gamma_{hik}}{\partial s_j} +$$
$$+ \sum_1^n{}_q \{ \gamma_{hiq}(\gamma_{qjk} - \gamma_{qkj}) + \gamma_{qhk} \gamma_{qij} - \gamma_{qhj} \gamma_{qik} \};$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1918.
(2) Questi Rendiconti, vol. XXVII, pag. 387.

i secondi membri altro non sono che gli invarianti di secondo ordine $\gamma_{hi,jk}$ definiti dalle (4), per cui le precedenti si possono scrivere

$$\gamma_{hi,jk} = \gamma_{hijk} - \gamma_{hikj} \,. \tag{12}$$

Queste formole — che mi sembrano notevoli — possono sostituire le originarie formole (4) di definizione dei predetti invarianti $\gamma_{hi,jk}$: come si vede essi risultano definiti, in modo alquanto semplice, mediante le prime derivate intrinseche dei coefficienti di rotazione di Ricci.

3. Come risulta dalle (5), i simboli $\gamma_{hi,jk}$ altro non sono che la traduzione invariantiva dei simboli di Riemann; sono perciò legati tra di loro dalle stesse relazioni che hanno luogo tra i corrispondenti simboli di Riemann. Esse sono le seguenti:

$$\gamma_{hi,jk} + \gamma_{ih,jk} = 0 \,, \tag{13}$$

$$\gamma_{hi,jk} - \gamma_{jk,hi} = 0 \,, \tag{14}$$

$$\gamma_{hi,jk} + \gamma_{hk,ij} + \gamma_{hj,ki} = 0 \,. \tag{15}$$

Corrispondentemente, per le (12), le prime derivate intrinseche dei coefficienti di rotazione sono legate dalle relazioni:

$$\gamma_{hijk} + \gamma_{ihjk} = \gamma_{hikj} + \gamma_{ihkj} \,, \tag{16}$$

$$\gamma_{hijk} + \gamma_{jkih} = \gamma_{hikj} + \gamma_{jkhi} \,, \tag{17}$$

$$\gamma_{hijk} + \gamma_{hkij} + \gamma_{hjki} = \gamma_{hikj} + \gamma_{hkji} + \gamma_{hjik} \,. \tag{18}$$

Dalle (12) scende altresì che l'annullarsi degli invarianti $\gamma_{hi,jk}$ (il che corrisponde per le (5) all'annullarsi dei simboli di Riemann) è equivalente a

$$\gamma_{hijk} = \gamma_{hikj} \,,$$

cioè alla simmetria rispetto ai due ultimi indici delle prime derivate intrinseche dei coefficienti di rotazione.

4. Dalle relazioni del Bianchi [1] che legano tra di loro le derivate (prime) covarianti dei simboli di Riemann, si ottengono, a norma di (5), le analoghe relazioni per i corrispondenti invarianti $\gamma_{hi,jk}$. Esse sono le seguenti:

$$\gamma_{hi,jkl} + \gamma_{lh,jki} + \gamma_{il,jkh} = 0 \,. \tag{19}$$

Dalle (12) derivando (intrinsecamente) una volta, si ottiene

$$\gamma_{hi,jkl} = \gamma_{hijkl} - \gamma_{hikjl} ; \tag{20}$$

(1) Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I [Pisa, Spoerri, 1902], pag. 351.

relazioni che esprimono le prime derivate degli invarianti $\gamma_{hi,jk}$ mediante le derivate seconde dei coefficienti di rotazione. Per le (20) dalle (19) scendono le seguenti notevoli relazioni tra le derivate seconde dei coefficienti di rotazione:

$$\gamma_{hijkl} + \gamma_{lhjki} + \gamma_{iljkh} = \gamma_{hikjl} + \gamma_{lhkji} + \gamma_{ilkjh} . \tag{21}$$

5. In una recente Nota [1], concernente le equazioni gravitazionali nella teoria della relatività generale di Einstein, ebbi occasione di attribuire alle 10 componenti del tensore gravitazionale delle espressioni particolarmente semplici mediante gli invarianti $\gamma_{hi,jk}$. Le (12) consentono ora di esprimere le stesse componenti linearmente mediante le prime derivate intrinseche dei coefficienti di rotazione di Ricci: ciò che può riuscire forse più vantaggioso per ulteriori indagini sul comportamento della metrica quadridimensionale einsteiniana di fronte a determinati fenomeni fisici.

Matematica. — *Sulle serie di potenze di una variabile sommate col metodo di Borel generalizzato.* Nota III [2] di Gustavo Sannia, presentata dal Socio Enrico d'Ovidio [3].

9. *Se sopra una semiretta p uscente dal punto* O *nessuno dei raggi* (n. 6)

$$\ldots\ldots , \mathrm{OP}_{-1} \,,\; \mathrm{OP}_0 \,,\; \mathrm{OP}_1 \,,\; \mathrm{OP}_2 , \ldots\ldots \tag{18}$$

delle stelle (5) *di sommabilità della serie di potenze* (1) *è nullo, ivi si ha*

$$u(z) \sim u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \cdots\cdot . \tag{19}$$

Ossia: per i valori di z giacenti su p, la serie (1) è lo *sviluppo asintotico* intorno al punto O (nel senso di Poincaré) della funzione $u(z)$ che è somma della serie (n. 1).

Sia infatti r un intero positivo qualunque. In un punto z del raggio OP_{r+1} (punto che supporremo diverso da O) la (1) è sommabile $(\mathrm{B}\,, r+1)$, quindi [4] la serie

$$u_r z^r + u_{r+1} z^{r+1} + \cdots\cdot ,$$

[1] Cisotti, *Forma intrinseca delle equazioni gravitazionali nella relatività generale* [questi Rendiconti, vol. XXVII, pag. 366].

[2] Complemento a due precedenti dallo stesso titolo (questi Rendiconti, vol. XXVII, serie 5ª, 1° sem., fasc. 2° e 4°). A pag. 99, linea 5ª della Nota I, si ponga « $r > 0$ » invece di « $r < 0$ ».

[3] Pervenuta all'Accademia il 4 luglio 1918.

[4] N, n. 3, cor. 2°, nel cui enunciato si scambino $(\mathrm{B}\,, r-n)$ e $(\mathrm{B}\,, r+n)$.