ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

Fisica. — *Sui motori sincroni senza eccitazione e sui circuiti ad autoinduzione variabile.* Nota del Corrisp. O. M. Corbino.

1. In molte applicazioni hanno impiego frequente alcuni tipi di motorini sincroni, per correnti alternate o trifasi, i quali funzionano senza che occorra la eccitazione da parte di una corrente continua. In essi lo statore, che porta gli avvolgimenti, è costituito come nei motori asincroni; presenta quindi una cavità cilindrica a denti lungo la quale si alternano le facce polari cui è dovuto il campo alternato o rotante, secondo che si tratti di motori monofasi o trifasi. Il rotore è costituito, molto semplicemente, da un blocco di ferro laminato con cavità profonde, cilindriche, ripartite lungo la periferia in numero eguale a quello dei poli dello statore. Così se questo ha due coppie di poli, lo statore ha la sagoma di un cilindro a croce di Malta, con quattro braccia eguali. Lungo le braccia sono avvolti talora delle matassine di filo, chiuse ciascuna in corto circuito; ovvero tutta la croce è circondata da una gabbia di scoiattolo. L'aggiunta ha un duplice scopo. Nei motori a campo rotante gli avvolgimenti o la gabbia forniscono la coppia di avviamento che porta il rotore rapidamente nelle vicinanze del sincronismo, raggiunto il quale gli avvolgimenti acquistano la funzione di smorzatori Leblanc rispetto alle oscillazioni intorno al sincronismo, che viene così assicurato assai bene. Per questa seconda funzione i circuiti stessi o la gabbia vengono adottati anche nei motorini monofasi, per i quali serve all'avviamento un secondo motorino a collettore disposto superiormente e coassiale col motore principale; la corrente che lo alimenta viene interrotta a sincronismo raggiunto.

La spiegazione del funzionamento di questo tipo di motore è semplicissima nel caso delle correnti trifasi. A sincronismo raggiunto le braccia del rotore si magnetizzano stabilmente per virtù del campo induttore, e i poli così creati vengono attratti dal campo rotante rispetto al quale restano permanentemente arretrati di un angolo costante, il cui valore dipenderà dalla coppia resistente. Una spiegazione analoga vale pel caso delle correnti monofasi, che creano nello spazio del rotore un campo alternativo; decomponendo questo in due campi rotanti opposti, uno di questi agirà sul rotore al sincronismo come nei motori trifasi; l'altro sarà praticamente senza effetto, avendo, rispetto al rotore, una velocità relativa doppia della corrente.

In questa Nota mi sono proposto di studiare le condizioni di funzionamento di questi motori, in riguardo alla alterazione che essi determinano nella forma della corrente, estendendo ad essi l'osservazione che è già stata fatta nella teoria degli alternatori, quella cioè di considerare gli avvolgimenti come circuiti ad autoinduzione variabile.

È invero evidente che il rotore in forma di croce offre nelle varie direzioni diametrali o radiali un cammino più o meno facile alle linee di induzione uscenti dalle facce polari dello statore; e pertanto nella rotazione del rotore ogni avvolgimento disposto intorno alla faccia polare dello statore viene a subire un mutamento periodico di autoinduzione; il periodo è eguale a quello di rotazione moltiplicato per il numero delle braccia del rotore; così se queste sono quattro come d'ordinario, l'autoinduzione assumerà periodicamente lo stesso valore quattro volte a ogni giro. E poichè, in tal caso, il rotore compie, al sincronismo, un giro ogni due periodi della corrente, l'autoinduzione assumerà lo stesso valore due volte a ogni periodo.

2. Sia pertanto

$$e = \mathrm{E}\,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha)$$

la forza e. m. d'alimentazione; si potrà porre per l'autoinduzione l dell'avvolgimento

$$l = \mathrm{L}(1 + \mathrm{K}\cos 2\omega t)$$

qualora l'origine delle fasi si conti da una delle posizioni di massimo della a. i.; in questa ultima espressione L denota l'a. i. media, e K l'ampiezza relativa della variazione, sempre inferiore all'unità com'è evidente.

L'equazione che domina l'andamento delia corrente i, e cioè

$$ri + \frac{d}{dt}(li) = e\,, \tag{1}$$

dove r è la resistenza ohmica, può quindi essere scritta:

$$ri + \mathrm{L}(1 + \mathrm{K}\cos 2\omega t)\frac{di}{dt} - i\,.\,2\mathrm{K}\mathrm{L}\omega\,.\,\mathrm{sen}\,2\omega t = \mathrm{E}\,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha)$$

o anche

$$(r - 2\mathrm{K}\mathrm{L}\omega\,\mathrm{sen}\,2\omega t)\,i + \mathrm{L}(1 + \mathrm{K}\cos 2\omega t)\frac{di}{dt} = \mathrm{E}\,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha)\,. \tag{2}$$

Al fine di determinare la corrente i, che a regime permanente deve assumere un valore periodico con frequenza fondamentale corrispondente a ω, si ponga

$$i = \Sigma\, i_m = \Sigma\, \mathrm{A}_m\,\mathrm{sen}(m\omega t + \alpha_m)$$

e quindi

$$\frac{di_m}{dt} = \mathrm{A}_m\, m\omega\cos(m\omega t + \alpha_m)\,.$$

Sostituendo nella (2), e isolando nel 1° membro la parte che deriva da i_m, essa risulta eguale a

$$r\mathrm{A}_m \operatorname{sen}(m\omega t + \alpha_m) - 2\mathrm{KL}\omega \operatorname{sen} 2\omega t \,.\, \mathrm{A}_m \operatorname{sen}(m\omega t + \alpha_m)$$
$$+ \mathrm{LA}_m\, m\omega \cos(m\omega t + \alpha_m) + \mathrm{LK} \cos 2\omega t \,.\, \mathrm{A}_m\, m\omega \cos(m\omega t + \alpha_m)\,;$$

e pertanto, dopo trasformazione del 2° e del 4° termine, eguale a

$$\begin{aligned} & r\mathrm{A}_m \operatorname{sen}(m\omega t + \alpha_m) + \mathrm{LA}_m\, m\omega \cos(m\omega t + \alpha_m) \\ & + \mathrm{LK}\omega\left(\frac{m}{2} - 1\right)\mathrm{A}_m \cos[(m-2)\,\omega t + \alpha_m] \\ & + \mathrm{LK}\omega\left(\frac{m}{2} + 1\right)\mathrm{A}_m \cos[(m+2)\,\omega t + \alpha_m]\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Si riconosce da ciò che dalla componente i_m di pulsazione $m\omega$ prendono origine nel primo membro due termini di pulsazione $(m-2)\omega$ e $(m+2)\omega$. Per la stessa ragione prenderanno origine dei termini di pulsazione $m\omega$ dalle componenti i_{m+2} e i_{m-2}. Raccogliendo quindi nello sviluppo del 1° membro, tutti i termini di pulsazione $m\omega$, derivanti direttamente da i_m e indirettamente da i_{m+2} e da i_{m-2}, tale parte dello sviluppo sarà data da;

$$r\mathrm{A}_m \operatorname{sen}(m\omega t + \alpha_m) + \mathrm{LA}_m\, m\omega \cos(m\omega t + \alpha_m)$$
$$+ \mathrm{LK}\,\frac{m}{2}\,\omega\, \mathrm{A}_{m+2} \cos(m\omega t + \alpha_{m+2}) + \mathrm{LK}\,\frac{m}{2}\,\omega\, \mathrm{A}_{m-2} \cos(m\omega t + \alpha_{m-2})\,.$$

In virtù della equazione (2) questa parte deve essere eguale a $\mathrm{E} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$ per $m = 1$, ed eguale a zero per tutti gli altri valori di m.

Si ponga

$$i_m = \mathrm{A}_m \operatorname{sen}(m\omega t + \alpha_m) = a_m \operatorname{sen} m\omega t + b_m \cos m\omega t$$

cioè

$$a_m = \mathrm{A}_m \cos \alpha_m \quad ; \quad b_m = \mathrm{A}_m \operatorname{sen} \alpha_m$$

con che a_m e b_m rappresentano le ampiezze della componente di pulsazione $m\omega$, l'una in seno, l'altra in coseno. Sarà, per quanto precede,

$$r a_m - \mathrm{L}m\omega\, b_m - \mathrm{L}m\omega\,\frac{\mathrm{K}}{2}\,(b_{m+2} + b_{m-2}) = 0$$

$$r b_m + \mathrm{L}m\omega\, a_m + \mathrm{L}m\omega\,\frac{\mathrm{K}}{2}\,(a_{m+2} + a_{m-2}) = 0$$

per m diverso da 1.

La soluzione è immediata se si trascurano per questi armonici elevati le tensioni ohmiche rispetto alle induttive; se si pone cioè $r = 0$, supponendo inoltre K non troppo piccolo di fronte a 1. Si ottiene allora

$$a_m = -\frac{K}{2}(a_{m-2} + a_{m+2})$$

$$b_m = -\frac{K}{2}(b_{m-2} + b_{m+2})$$

le quali sono soddisfatte ponendo

$$a_{m+2} = sa_m = s^2 a_{m-2} = \cdots$$
$$b_{m+2} = sb_m = s^2 b_{m-2} = \cdots$$

qualora s verifichi l'equazione

$$s^2 + \frac{2}{K}s + 1 = 0$$

cioè qualora sia

(4) $$s = \frac{-1 + \sqrt{1 - K^2}}{K}.$$

Con ciò ogni componente armonica dispari della corrente è una frazione costante dell'armonica dispari precedente (le armoniche pari, com'è chiaro, sono tutte nulle).

3. Basterà quindi, per il calcolo di a_m e b_m, la conoscenza di a_1 e b_1. Il caso di $m = 1$ richiede un esame speciale. La formola (3) ci dice intanto che dalla componente i_1 prendono origine un termine in $\cos(-\omega t + \alpha_1) = \cos(\omega t - \alpha_1)$; e che un termine in $\cos(\omega t + \alpha_3)$ prende origine da i_3. Tenendo conto di tutta la parte che contiene ωt, ed eguagliandola al secondo membro $E \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$ si ottengono le equazioni:

$$ra_1 - L\omega b_1 - \tfrac{1}{2} L\omega K(b_1 + b_3) = E \cos \alpha$$
$$rb_1 + L\omega a_1 - \tfrac{1}{2} L\omega K(a_1 - a_3) = E \operatorname{sen} \alpha.$$

Osservando che per quel che si è detto

$$a_3 = sa_1 \quad ; \quad b_3 = sb_1$$

otteniamo, sostituendo ad s il suo valore dato dalla (4):

$$ra_1 - \tfrac{1}{2} L\omega b_1(1 + K + \sqrt{1 - K^2}) = E \cos \alpha$$
$$rb_1 + \tfrac{1}{2} L\omega a_1(1 - K + \sqrt{1 - K^2}) = E \operatorname{sen} \alpha.$$

Se anche per la componente fondamentale si trascurano le perdite ohmiche, si pone cioè $r = 0$, si ottiene

$$(5)\qquad \begin{aligned} a_1 &= \frac{\mathrm{E}\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\frac{1}{2}\,\mathrm{L}\omega(1-\mathrm{K}+\sqrt{1-\mathrm{K}^2})} \\ b_1 &= \frac{-\,\mathrm{E}\cos\alpha}{\frac{1}{2}\,\mathrm{L}\omega(1+\mathrm{K}+\sqrt{1-\mathrm{K}^2})} \end{aligned}$$

dai quali valori si può passare al calcolo delle componenti a_m, b_m di qualunque armonica per mezzo delle formole

$$a_m = s^m a_1 \quad ; \quad b_m = s^n b_1 \, .$$

Si può quindi considerare risoluto il problema, col risultato che per il funzionamento del motore prende origine tutta la serie degli armonici dispari della corrente fondamentale, con ampiezze decrescenti in progressione geometrica, avente per ragione $s = \frac{-1+\sqrt{1-\mathrm{K}^2}}{\mathrm{K}}$. Se fosse, ad esempio, $\mathrm{K} = \frac{1}{2}$, cioè se la self variasse periodicamente fra $\frac{1}{2}\mathrm{L}$ e $2\,\mathrm{L}$, il rapporto fra ogni armonica e la precedente sarebbe circa 0,067.

4. Nel caso semplice di $r = 0$, cui corrispondono le (5), la totale potenza elettrica media assorbita dal motore si converte in potenza meccanica. E poichè agisce la f. e. m. $\mathrm{E}\,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha)$ di pulsazione ω, ed è nullo il lavoro elettrico medio risultante da quella f. e. m. con le armoniche della corrente di pulsazione multipla di ω, la potenza elettrica si otterrà tenendo presenti solo a_1 e b_1. Con a_1 è in fase la componente $\mathrm{E}\cos\alpha$ della tensione; con b_1 la componente $\mathrm{E}\,\mathrm{sen}\,\alpha$ di essa. Si ha pertanto come espressione della potenza media assorbita P, in funzione delle ampiezze massime

$$(6)\qquad \begin{aligned} \mathrm{P} &= \frac{a_1\,\mathrm{E}\cos\alpha}{2} + \frac{b_1\,\mathrm{E}\,\mathrm{sen}\,\alpha}{2} = \\ &= \frac{\mathrm{E}^2}{2\mathrm{L}\omega}\,\mathrm{sen}\,2\alpha\,\frac{\mathrm{K}}{1-\mathrm{K}^2+\sqrt{1-\mathrm{K}^2}} = \frac{\mathrm{E}_{eff}^2}{\mathrm{L}\omega}\,\mathrm{sen}\,2\alpha\,\frac{\mathrm{K}}{1-\mathrm{K}^2+\sqrt{1-\mathrm{K}^2}} \end{aligned}$$

dove E_{eff} denota la tensione efficace primaria. Si riconosce da questa formola che la potenza, e quindi la coppia motrice poichè si tratta di un motore sincrono, cresce al crescere di K, cioè dell'ampiezza dei mutamenti periodici della self; e che essa coppia è proporzionale a $\mathrm{sen}\,2\alpha$ acquistando il massimo valore per $\alpha = 45°$.

In conseguenza al crescere della coppia resistente aumenterà α, cioè l'anticipo della f. e. m. rispetto alle variazioni della self, e quindi il ritardo costante dell'asse del rotore sulla direzione del campo rotante nei motori trifasi. Nel caso del motore a quattro poli, poichè il rotore compie un giro a ogni due periodi, la coppia massima si otterrà quando il diametro più lungo del rotore a croce resta indietro di 22°,5 rispetto alla direzione che assume nel funzionamento a vuoto (coppia nulla, $\alpha = 0$). Per un ulteriore accrescimento della coppia resistente il motore perde il sincronismo.

5. Ritornando alla forma della corrente abbiamo veduto come se ne può dare lo sviluppo in serie di Fourier, e dedotto una legge semplice di variazione dei coefficienti che vale nel caso di una resistenza ohmica trascurabile negli avvolgimenti. Ma quando questa ipotesi è verificata si può ottenere per i l'espressione analitica completa partendo direttamente dalla (1), la quale diviene, per $r = 0$

$$\frac{d}{dt}(li) = \mathrm{E}\,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha)$$

e quindi

$$li = -\frac{\mathrm{E}}{\omega}\cos(\omega t + \alpha)\,.$$

Sostituendo a l il suo valore, si ottiene

$$i = -\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{L}\omega}\,\frac{\cos(\omega t + \alpha)}{1 + \mathrm{K}\cos 2\omega t}$$

la quale consente il tracciamento grafico della curva che dà la forma di i, e rivela già dalla sua struttura le notevoli deviazioni di i dalla forma sinusoidale appena K non sia troppo piccolo.

6. Le considerazioni sopra esposte sono estensibili a tutti i casi in cui una f. e. m. alternativa agisca in un circuito di autoinduzione variabile periodicamente. Così valgono per il caso di un elettrodiapason alimentato con una f. e. m. alternativa, poichè la forchetta vibrante crea un circuito magnetico più o meno facile alle linee di forza generale nel rocchettino; la potenza elettrica spesa localmente intrattiene le oscillazioni di periodo doppio di quello della f. e. m. se la forchetta non è un magnete permanente; altrettanto vale per un telefono non polarizzato. Può anche considerarsi come un'autoinduzione variabile, a frequenza doppia della f. e. m. agente, ogni self con nucleo di ferro, per la non costanza della permeabilità di questo metallo: in tal caso la formola (6) ci dice che si ha perdita locale di energia quando le variazioni della self sono tali che questa non sia massima proprio nelle fasi di zero della f. e. m., ciò che avviene sempre per la isteresi; mentre, indipendentemente da questa, la corrente perde la forma sinusoidale.