ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

relazioni che esprimono le prime derivate degli invarianti $\gamma_{hi,jk}$ mediante le derivate seconde dei coefficienti di rotazione. Per le (20) dalle (19) scendono le seguenti notevoli relazioni tra le derivate seconde dei coefficienti di rotazione:

$$\gamma_{hijkl} + \gamma_{lhjki} + \gamma_{iljkh} = \gamma_{hikjl} + \gamma_{lhkji} + \gamma_{ilkjh}\,. \tag{21}$$

5. In una recente Nota (¹), concernente le equazioni gravitazionali nella teoria della relatività generale di Einstein, ebbi occasione di attribuire alle 10 componenti del tensore gravitazionale delle espressioni particolarmente semplici mediante gli invarianti $\gamma_{hi,jk}$. Le (12) consentono ora di esprimere le stesse componenti linearmente mediante le prime derivate intrinseche dei coefficienti di rotazione di Ricci: ciò che può riuscire forse più vantaggioso per ulteriori indagini sul comportamento della metrica quadridimensionale einsteiniana di fronte a determinati fenomeni fisici.

Matematica. — *Sulle serie di potenze di una variabile sommate col metodo di Borel generalizzato.* Nota III (²) di Gustavo Sannia, presentata dal Socio Enrico d'Ovidio (³).

9. *Se sopra una semiretta p uscente dal punto* O *nessuno dei raggi* (n. 6)

$$\ldots, OP_{-1}\,,\ OP_0\,,\ OP_1\,,\ OP_2, \ldots \tag{18}$$

delle stelle (5) *di sommabilità della serie di potenze* (1) *è nullo, ivi si ha*

$$u(z) \sim u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \cdots. \tag{19}$$

Ossia: per i valori di z giacenti su p, la serie (1) è lo *sviluppo asintotico* intorno al punto O (nel senso di Poincaré) della funzione $u(z)$ che è somma della serie (n. 1).

Sia infatti r un intero positivo qualunque. In un punto z del raggio OP_{r+1} (punto che supporremo diverso da O) la (1) è sommabile $(B, r+1)$, quindi (⁴) la serie

$$u_r z^r + u_{r+1} z^{r+1} + \cdots,$$

(¹) Cisotti, *Forma intrinseca delle equazioni gravitazionali nella relatività generale* [questi Rendiconti, vol. XXVII, pag. 366].

(²) Complemento a due precedenti dallo stesso titolo (questi Rendiconti, vol. XXVII, serie 5ª, 1° sem., fasc. 2° e 4°). A pag. 99, linea 5ª della Nota I, si ponga « $r > 0$ » invece di « $r < 0$ ».

(³) Pervenuta all'Accademia il 4 luglio 1918.

(⁴) N, n. 3, cor. 2°, nel cui enunciato si scambino $(B, r-n)$ e $(B, r+n)$.

che se ne deduce sopprimendo i primi r termini, è sommabile (B, 1) ed ha per somma $u(z) - u_0 - u_1 z - \cdots - u_{r-1} z^{r-1}$; sicchè si può scrivere

$$u(z) - u_0 - u_1 z - \cdots - u_{r-1} z^{r-1} = u_r z^r + u_{r+1} z^{r+1} + \cdots, \tag{20}$$

da cui

$$\frac{1}{z^{r-1}} [u(z) - u_0 - u_1 z - \cdots - u_{r-1} z^{r-1}] = u_r z + u_{r+1} z^2 + \cdots \tag{21}$$

La serie del secondo membro è sommabile (B, 1), come la (20) (N, n. 3, 11), e la sua somma è zero per $z = 0$ ed è rappresentata dal primo membro per $z \neq 0$.

Poichè la serie (21) è sommabile (B, 1) nel punto $z \neq 0$ considerato di p, è ben certo che il raggio della sua stella di sommabilità (B, 1) giacente su p non è nullo; e ciò permette di asserire [1] che la sua somma, considerata come funzione di z nel campo *lineare* costituito dal raggio stesso, è funzione continua nel punto $z = 0$. Dunque si ha su p

$$\lim_{z=0} \frac{1}{z^{r-1}} [u(z) - u_0 - u_1 z - \cdots - u_{r-1} z^{r-1}] = 0$$

per ogni intero positivo r, ossia si ha la (19) (per definizione).

10. È noto che le serie asintotiche di Poincaré si possono integrare termine a termine, ma *non sempre* si possono derivare termine a termine. Però è facile vedere che nel nostro caso ciò è lecito.

Precisamente: *sotto le ipotesi fatte nel teorema precedente, le derivate successive $u'(z)$, $u''(z)$, ... di $u(z)$, prese secondo la semiretta p, sono rappresentate asintoticamente sopra p ed intorno ad O dalle serie che si ottengono derivando successivamente la* (1) *termine a termine.*

Dimostriamo p. es. che

$$u'(z) \sim u_1 + 2u_2 z + 3u_3 z^2 + \cdots \tag{22}$$

Infatti le stelle di sommabilità della serie (22) coincidono con quelle della (1) [2], quindi le ipotesi fatte sulla (1) sono soddisfatte anche dalla (22), la quale perciò (teor. prec.) rappresenta asintoticamente su p ed intorno ad O quella funzione che è somma della serie stessa sommata col metodo di Borel generalizzato. Ma tal somma è [3] la derivata $u'(z)$ di $u(z)$ presa secondo la semiretta p; dunque la (22) sussiste.

[1] Cfr. il n. 22 del mio lavoro: *Le serie di potenze di una variabile sommate col metodo di Borel generalizzato* (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. LIII, Nota I a pag. 135 e Nota II, a pag. 192).

[2] Ibid., n. 23.

[3] Ibidem.

11. I risultati dei nn. 9 e 10 valgono in particolare: *se sulla semiretta p il raggio* OT *della stella τ, ove la* (1) *è sommabile* Bt (n. 3), *non è nullo.* Poichè OT è limite inferiore dei raggi (18).

Più particolarmente ancora, valgono: *se esiste un numero positivo l tale che per ogni intero r la funzione di b*

$$e^{-lb}\, u^{(r)}(be^{i\theta}, 1),$$

ove θ è l'inclinazione di p sul semiasse reale positivo, sia limitata per $b \geq 0$ [1].

Infatti in tal caso esiste un numero positivo K (dipendente da r) tale che

$$(23) \qquad |u^{(r)}(be^{i\theta}, 1)| < \mathrm{K}e^{lb} \qquad (b \geq 0)$$

Ora in un punto $z = \varrho e^{i\theta}$ di p ($\varrho \neq 0$) si ha (come al n. 6)

$$u^{(r)}(a, z) = z^r u^{(r)}(az, 1) = \varrho^r e^{ri\theta} u^{(r)}(a\varrho e^{i\theta}, 1),$$

quindi, posto $a\varrho = b$ ($a \geq 0$), si ha

$$e^{-a}\, |\, u^{(r)}(a, z)\, |\, da = \varrho^{r-1} e^{-b/\varrho}\, |\, u^{(r)}(be^{i\theta}, 1)\, |\, db < \varrho^{r-1} \mathrm{K}e^{b(l-1/\varrho)}\, db .$$

Poichè l'integrale di $e^{b(l-1/\varrho)}$ tra i limiti 0 e $+\infty$ è convergente se $\varrho < 1/l$, tale è pure l'integrale di $e^{-a}\, |\, u^{(r)}(a, z)\, |$ tra i limiti 0 e $+\infty$; quindi l'integrale (3) è convergente (ed assolutamente) per ogni r in tutti i punti z di p il cui modulo è minore di $1/l$; sicchè in questi punti la (1) è sommabile Bt, e quindi su p è OT > 0.

12. Osserviamo per finire che tutta la teoria svolta fin qui (nelle due Note citate al n. 10 e nelle presenti tre Note), sulle serie di potenze sommate col metodo Bg, è suscettibile di una larga estensione.

Affinchè una serie qualunque $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ sia sommabile Bg, si richiede anzitutto che le serie associate

$$(24) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+r} \frac{x^n}{n!} \qquad (u_{n+r} = 0 \text{ se } n + r < 0)$$

siano trascendenti intere. Ora questa condizione, per la quale molte serie notevoli sfuggono alla sommabilità, può essere sostituita dalla seguente, molto meno restrittiva: C) *le serie* (24) *abbiano il comune raggio di convergenza non nullo e definiscano funzioni analitiche $u^{(r)}(x)$ proseguibili*

[1] E quindi anche: *se esiste un $l > 0$ tale che, per ogni intero r, risulti*

$$\lim_{b=+\infty} e^{-lb}\, u^{(r)}(be^{i\theta}, 1) = 0 .$$

Solo in questo caso particolarissimo i nostri risultati erano già noti. Cfr. Bromwich, loc. cit. (nella Nota I), nn. 136 e 137.

analiticamente lungo tutto il semiasse reale positivo ($x \geq 0$) *ed ivi regolari*.

Ho dimostrato infatti in una recente Memoria [1] che ciò non turba la teoria generale (aritmetica) del metodo di sommazione Bg. Orbene ciò non turba neppure la teoria delle serie di potenze [2].

Matematica. — *Sur certaines familles de fonctions*. Nota di JOSEPH PÉRÈS, presentata dal Socio V. VOLTERRA [3].

1. J'ai indiqué ailleurs [4] l'intérêt que présentent les familles de fonctions

$$f_n(t) = t^n + \int_0^t \tau^n \, K(\tau, t)\, d\tau \qquad (n = 0, 1, 2, \dots, \infty) \tag{1}$$

et j'ai étudié les relations entre les fonctions $f_n(t)$ et $K(\tau, t)$ dans le cas où ces fonctions sont holomorphes dans le domaine de l'origine.

Le forme caractéristique des f_n que j'ai indiquée [5] met en évidence, certaines relations simples entre les f_n et $K(\tau, t)$. Elle présente l'avantage de permettre, dans une certaine mesure, l'abandon de l'hypothèse d'analyticité. Mais surtout elle s'applique très aisément à l'étude de familles de fonctions (1) déduites de la théorie des fonctions permutables. C'est ainsi qu'on en déduira, presque sans calculs, que les fonctions

$$f(t), \overset{*}{f}{}^{2}(t), \dots \overset{*}{f}{}^{n}(t), \dots,$$

ou les fonctions

$$\psi(t), \overset{*}{\psi}\overset{*}{f}(t), \dots \overset{*}{\psi}\overset{*}{f}{}^{n}(t), \dots,$$

déduites par composition de deux fonctions f et ψ permutables avec l'unité forment des familles (2); on obtiendra immédiatement les noyaux correspondants.

(1) Di prossima pubblicazione in una raccolta di *Scritti matematici dedicati ad Enrico d'Ovidio in occasione del Suo LXXV compleanno* (Bocca, Torino).

(2) Soltanto il lemma del n. 9 della Nota citata al n. 10 (e che poi si invoca nei nn. 13 e 19) va sostituito col seguente: *se in un punto* $z_0 \neq 0$ *una delle serie* (24) *associate alla* (1) *soddisfa la condizione* C), *tutte le serie* (24) *la soddisfanno ed in ogni punto* z *del segmento che unisce il punto* z_0 *al punto* $z = 0$.

Si dimostra facilmente allo stesso modo.

(3) Pervenuta all'Accademia il 13 luglio 1918.

(4) Comptes rendus de l'Académie des Sciences, tom. 166, pp. 723 et 806.

(5) Ibid., pag. 806.