ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

Idromeccanica. — *Equazione caratteristica dei piccoli moti ondosi in un canale di qualunque profondità.* Nota I di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

In un canale, a fondo orizzontale e a sponde verticali, la massa liquida, perfetta e pesante, sia in equilibrio. — Si immagini di turbare lievemente, e in modo qualsiasi, lo specchio d'acqua: si constata allora la formazione di piccoli moti ondosi.

Lo studio matematico di queste onde fu — ed è tuttora — oggetto di numerose ricerche, a cominciare dalle classiche Memorie di Poisson (1) e di Cauchy (2). — Per la estesa bibliografia si possono consultare i Cap. VIII e IX del Trattato di idrodinamica del Lamb (3). — Gli studî compiuti in argomento si possono compendiosamente riassumere nei seguenti gruppi:

a) onde in canali di piccola profondità (Lagrange) (4);

b) onde in canali di profondità infinita (Poisson-Cauchy) (5), oppure in canali di profondità considerevole, senza essere infinita (Palatini) (6);

c) onde progressive di tipo permanente (Green, Airy, Stokes, Helmholtz, Rayleigh, Boussinesq, Mc Cowan, Levi-Civita);

d) metodi approssimati di ricerca di soluzioni ondose generali in canali di profondità finita e soluzioni particolari (Stokes, Kelvin, Rayleigh, Pidduck, Haveloch).

Nei problemi *a*), *b*), *c*) il punto di vista è sempre particolare; i metodi accennati in *d*) non lumeggiano nitidamente la questione analitica. Per il problema ondoso ivi accennato si presenta la difficoltà di potersi liberare ad un tempo dalle condizioni al pelo libero e al fondo del canale, difficoltà che può agevolmente essere rimossa nei problemi *a*) e *b*), a cagione delle ipotesi semplificatrici in esse contenute.

(1) Poisson, *Mémoire sur la théorie des ondes* [Mém. de l'Acad. Roy. des Sciences, t. I (1816)].

(2) Cauchy, *Mémoire sur la théorie des ondes* [Mém. de l'Acad. Roy. des Sciences, t. I (1827)].

(3) Lamb, *Hydrodynamics* [Cambridge, University Press (1916); Fourth Edition].

(4) Lagrange, *Oeuvres* [t. I].

(5) Poisson, Cauchy, loc. cit.

(6) Palatini, *Sulla influenza del fondo nella propagazione delle onde dovute a perturbazioni locali* [Rend. del Circ. Mat. di Palermo, t. XXXIX (1915)]. — Idem, *Studio asintotico del pelo libero* [Ibidem, t. XL (1915)].

Come questa difficoltà si può rimuovere nel caso c), fu mostrato da Levi-Civita [1], con ingegnoso criterio.

In questa prima Nota con opportuno adattamento del criterio di Levi-Civita mi propongo di mettere in rilievo che *il problema dei piccoli moti ondosi in un canale di profondità finita* (*qualunque*) *si può far dipendere da un'unica equazione mista* — cioè differenziale e alle differenze finite — *lineare e di second'ordine* (di tipo parabolico) *relativa ad un'unica funzione olomorfa*: essa è pertanto *equazione caratteristica* dei moti ondosi in discorso.

In una Nota successiva farò vedere come da questa equazione caratteristica scendano in particolare e nel modo più naturale le equazioni caratteristiche (non più alle differenze finite) già conosciute e corrispondenti ai problemi a), b); e infine che, nell'ipotesi di moti ondosi aventi carattere permanente rispetto ad una traslazione uniforme (caso c)) si ritrova l'equazione caratteristica stabilita da Levi-Civita [2].

Concludendo, l'equazione caratteristica che presento racchiude in sè tutti i problemi di piccoli moti ondosi fino ad ora considerati e costituisce un sicuro, e spero valido, punto di partenza per la ricerca di soluzioni ondose in canali di qualunque profondità.

1. *Brevi richiami sulla impostazione del problema* [3]. — Si ammette, com'è consuetudine, che il moto ondoso abbia luogo per piani verticali paralleli alle sponde del canale col medesimo comportamento in ognuno d'essi; si ha così il vantaggio di ridurre il problema alle due dimensioni. Assumo in uno generico di questi piani una coppia di assi cartesiani ortogonali O; x, y coll'asse x orizzontale e coincidente col fondo del canale e l'asse y verticale ascendente; è indifferente la scelta dell'origine O che lascio arbitraria. Sia l il *pelo libero*, che allo stato naturale della massa liquida è orizzontale, cioè è una retta parallela al fondo e che ne dista h — *profondità del canale* —. A perturbazione avvenuta l muta forma, che in generale è variabile col tempo t; il moto ondoso ha quindi sede in una striscia indefinita S compresa tra il fondo $y = 0$ e la linea l.

Equazioni indefinite. — Supposto il moto regolare ed irrotazionale, esistono: una funzione $\varphi(t; x, y)$ — *potenziale di velocità* — e la *funzione di corrente* $\psi(t; x, y)$, funzioni armoniche associate, cioè legate tra di loro dalle relazioni

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} , \tag{1}$$

(1) Levi-Civita, *Sulle onde progressive di tipo permanente* [Questi Rend.; vol. XVI (1907); pag. 777].

(2) Levi-Civita, loco citato.

(3) Lamb, loco citato, pag. 351.

che supporrò regolari e derivabili quanto occorre in S e per ogni t finito e susseguente alla perturbazione.

Supposta omogenea la massa fluida il valore p della pressione risulta in ogni punto e in ogni istante legato alla densità (costante) ϱ, alla gravità g e al valore

$$V=\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}$$

della velocità della nota relazione

$$\frac{p}{\varrho}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}V^2+gy=\text{funzione della sola } t.$$

Trattandosi di piccoli moti ondosi il terzo termine si può trascurare, per cui la precedente si riduce a

(2) $$\frac{p}{\varrho}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}+gy=\text{funzione della sola } t.$$

Questa, unitamente alla condizione di armonicità della φ:

(3) $$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0,$$

esaurisce le equazioni indefinite.

Condizione al fondo. — Bisogna esprimere che, per qualunque t, il fondo del canale è linea di flusso; per questo è necessario e sufficiente che la funzione di corrente ψ abbia valore costante sul fondo; assumendo per la costante il valore zero, si ha la seguente condizione al fondo:

(4) $$\psi=0\,,\ \text{per } y=0 \quad \text{e qualunque } t.$$

Condizione al pelo libero. — Rappresenti

(5) $$y=h+\eta(t\,;x)$$

l'equazione di l in un generico istante t, con che $\eta=y-h$ è, in un posto generico di l il sopraelevamento sullo specchio imperturbato $y=h$; per l'ordine di approssimazione voluto è a ritenersi $\frac{\eta}{h}$ quantità di primo ordine.

La condizione relativa ad l è la isobaricità, il che si esprime per la (2), conglobando in $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ la funzione della sola t del secondo membro, nel modo seguente

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+g\eta=0 \quad , \quad \text{sopra } l.$$

Potendosi ammettere che l'accelerazione verticale di ogni particella liquida sia trascurabile di fronte all'accelerazione di gravità, facilmente si vede ([1]) che, nell'ordine di approssimazione impostoci, la precedente condizione si può sostituire con la seguente:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad , \quad \text{per } y = h \text{ e qualunque } t. \tag{6}$$

Dovendo questa essere soddisfatta per qualunque t, si potrà derivare ulteriormente rispetto a questo argomento, ottenendo così

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0,$$

ovvero, notando che

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

si può scrivere in definitiva

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - g\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad , \quad \text{per } y = h \text{ e qualunque } t. \tag{7}$$

Affinchè il problema di moto ondoso risultasse determinato sarebbero ulteriormente da fissarsi le condizioni iniziali: siccome però queste interessano la effettiva integrazione dell'equazione alla quale mi propongo di pervenire, integrazione che non è oggetto delle Note presenti, così converrà rimandare la relativa discussione a quando mi occuperò dell'integrazione dell'equazione caratteristica.

Concludendo, la traduzione analitica del problema ondoso in discorso (prescindendo dalle circostanze iniziali) è contenuta nella questione seguente: determinare una funzione φ armonica e regolare nella striscia S, ad ogni istante, tale che essa e la sua associata ψ soddisfino alle condizioni (4) e (7).

2. *Ricorso al piano complesso $z = x + iy$. — Equazione caratteristica.* — Conviene introdurre la variabile complessa $z = x + iy$, nella striscia S. Essendo φ e ψ (considerate quali funzioni di x e y) funzioni armoniche associate, ponendo

$$f = \varphi + i\psi,$$

si ottiene una funzione di $z = x + iy$ (oltre che di t), che deve per ogni valore di t mantenersi regolare in S (essendolo, per ipotesi, φ e ψ) e di più

([1]) Cfr. ad es. Palatini, loc. cit., § 1, n. 4.

deve, per la (4), mantenersi reale sull'asse reale. Ne segue per il noto principio di riflessione analitica di Schwarz che f è prolungabile analiticamente nella striscia S':

$$-h \leq y \leq 0 \quad , \quad -\infty \leq x \leq \infty ,$$

immagine riflessa di S, assumendo in ogni punto $(x, -y)$ di S' il valore coniugato di quello che essa assume nel corrispondente punto (x, y) di S. Per cui se nel punto $z = x + iy$ è, in un generico istante:

$$f(t; x + iy) = \varphi(t; x, y) + i\psi(t; x, y) ,$$

nello stesso istante nel punto coniugato $\bar{z} = x - iy$ si ha:

$$f(t; x - iy) = \varphi(t; x, y) - i\psi(t; x, y) .$$

Da queste seguono:

$$(8) \qquad \begin{cases} \varphi(t; x, y) = \dfrac{1}{2}\left\{ f(t; x + iy) + f(t; x - iy) \right\}, \\[2ex] \psi(t; x, y) = \dfrac{1}{2i}\left\{ f(t; x + iy) - f(t; x - iy) \right\}. \end{cases}$$

Riferendosi, in particolare, ai punti del pelo imperturbato $y = h$, basta porre in queste $y = h$, allora la condizione (7), relativa al pelo libero, può scriversi:

$$(7') \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{ f(t; x + ih) + f(t; x - ih) \right\} + \\ + ig\frac{\partial}{\partial x}\left\{ f(t; x + ih) - f(t; x - ih) \right\} = 0 .$$

Conviene ora far intervenire la circostanza che f è funzione analitica: la precedente, dedotta per x reale, vale per qualunque valore complesso z appartenente al campo di esistenza; per cui scrivendo z al posto di x, si ottiene:

$$(9) \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{ f(t; z + ih) + f(t; z - ih) \right\} + \\ + ig\frac{\partial}{\partial z}\left\{ f(t; z + ih) - f(t; z - ih) \right\} = 0 .$$

Il problema è ora condotto alla integrazione di questa equazione che è differenziale lineare del secondo ordine e di tipo parabolico e nello stesso tempo alle differenze finite.

Facilmente si constata che ogni integrale della (9) reale sull'asse reale, soddisfa alle volute condizioni al fondo e al pelo libero, per cui la (9) è *equazione caratteristica* dei moti ondosi in discorso.