ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

2° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

Matematica. — *Sulle equazioni integrali.* Nota IV di PIA NALLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

15. Servendoci dei risultati ottenuti nelle Note precedenti dimostreremo che: *se c è una costante caratteristica propria relativa a* $K(s,t)$ *e* $k(s)$, *esiste una funzione* $H(s,t)$ *soddisfacente all'eguaglianza*

$$(c - k(s))\, H(s,t) = \int_a^b K(s,v)\, H(v,t)\, dv,$$

tale che, qualunque sia la funzione fondamentale $\varphi(s)$ *corrispondente alla costante* c, *si abbia*

$$(c - k(s))\, \varphi(s) = \int_a^b H(t,s)\, \varphi(t)\, dt .$$

Come conseguenza di queste due relazioni si avrà

$$(c - k(s))\, H(s,t) = \int_a^b H(v,s)\, H(v,t)\, dv .$$

Daremo anche un metodo per calcolare $H(s,t)$ quando è nota c.

Chiameremo $H(s,t)$ *funzione caratteristica* corrispondente alla costante c.

16. Premettiamo la seguente osservazione.

Sia μ una costante caratteristica propria relativa a $K(s,t)$ e $k(s)$ e sia $\mu^2 = d$, dove d è la costante determinata al n. 13 della Nota precedente. Supponiamo anche μ diversa dalle μ_n della successione (20), dimodochè, per qualunque funzione fondamentale $\varphi(s)$ corrispondente a μ, si avrà $\int_a^b \Gamma_n(t,s)\, \varphi(t)\, dt = 0$, qualunque sia n. Sarà allora $D(s,t) \neq 0$.

Infatti, da

$$(\mu - k(s))\, \varphi(s) = \int_a^b K(s,t)\, \varphi(t)\, dt$$

si trae

$$(\mu^n - k^n(s))\, \varphi(s) = \int_a^b K^{(n)}(s,t)\, \varphi(t)\, dt ,$$

e di qui

$$\mu^{n-1}(\mu - k(s))\, \varphi(s) = \int_a^b [K^{(n)}(s,t) - k(s)\, K^{(n-1)}(s,t)]\, \varphi(t)\, dt ,$$

cioè

$$\mu^{n-1}(\mu - k(s))\, \varphi(s) = \int_a^b G_n^{(1)}(t,s)\, \varphi(t)\, dt ,$$

ed essendo, per qualunque n, $\int_a^b \Gamma_n(t, s)\, \varphi(t)\, dt = 0$ sarà pure, per qualunque n, $\int_a^b C_n(t, s)\, \varphi(t)\, dt = 0$: l'ultima eguaglianza si può anche scrivere

$$\mu^{n-1}(\mu - k(s))\, \varphi(s) = \int_a^b D_n(t, s)\, \varphi(t)\, dt.$$

Mettendo invece di n, $2n$, tenendo conto che è $\mu^2 = d$, avremo

$$(\mu - k(s))\, \varphi(s) = \mu \int_a^b \frac{D_{2n}(t, s)}{d^n}\, \varphi(t)\, dt,$$

e facendo tendere n ad ∞, per la convergenza in media di $\dfrac{D_{2n}(t, s)}{d^n}$ verso $D(t, s)$,

$$(\mu - k(s))\, \varphi(s) = \mu \int_a^b D(t, s)\, \varphi(t)\, dt,$$

non può dunque essere $D(s, t) = 0$.

Si vede anche che $\mu\, D(s, t)$, ovvero $\mu\, M_i(s, t)$, dove è $\mu = (-1)^{i-1}\sqrt{d}$ (quando le due funzioni $M_1(s, t)$ ed $M_2(s, t)$ sono entrambe non nulle) è funzione caratteristica corrispondente a μ.

17. Passiamo ora a dimostrare quanto abbiamo enunciato al n. 15.

Sia $(t_0; t_1)$ un intervallo dove cadono i valori di $k(s)$ e c. Si fissi α in modo che sia

$$2c - \alpha < t_0 < t_1 < \alpha:$$

il polinomio $x^2 - 2cx + (2c - \alpha)\alpha$ prende valori negativi quando x varia in (t_0, t_1) ed è minimo per $x = e$.

Si avrà dunque, per x compreso in (t_0, t_1),

$$(c - \alpha)^2 \geq |x^2 - 2cx + (2c - \alpha)\alpha|. \tag{28}$$

Sia $\varphi(s)$ una funzione fondamentale propria relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$ e corrispondente a c: chiamando $P(s, t)$ il secondo nucleo iterato di $K(s, t)$ per mezzo di $k(s) - c$, si avrà:

$$0 = (k(s) - c)^2\, \varphi(s) + \int_a^b P(s, t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{29}$$

e sarà quindi

$$\int_a^b P(s, t)\, \varphi(t)\, dt \neq 0. \tag{30}$$

La (29) si può anche scrivere

$$\lambda\, \varphi(s) = p(s)\, \varphi(s) + \int_a^b P(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

con $p(s) = k^2(s) - 2ck(s) + (2c - \alpha)\alpha$ e $\lambda = -(c - \alpha)^2$, quindi, tenendo conto della (30), possiamo dire che λ è una costante caratteristica propria relativa a $\mathrm{P}(s, t)$ e $p(s)$.

Nella (28) al posto di x si può mettere $k(s)$, sarà dunque

$$\lambda^2 \geq p^2(s) . \tag{31}$$

Si possono dare due casi: 1°) esiste un numero $\delta > 0$ tale che sia quasi dapertutto

$$\lambda^2 > p^2(s) + \delta ; \tag{32}$$

ed allora, per i risultati della Nota III, si può determinare una funzione $\Gamma(s, t)$, caratteristica relativamente a $\mathrm{P}(s, t)$ e $p(s)$, corrispondente alla costante λ; 2°) la (32) non è soddisfatta per nessun $\delta > 0$.

Siano allora $\mu_1, \mu_2, \ldots$ tutte le eventuali costanti caratteristiche relative a $\mathrm{P}(s, t)$ e $p(s)$ per le quali è soddisfatta quasi dapertutto la disuguaglianza

$$\mu^2 > p^2(s) + \delta \tag{33}$$

con qualche $\delta > 0$ e $\Gamma_1(s, t), \Gamma_2(s, t), \ldots$ le corrispondenti funzioni caratteristiche, determinate coi metodi nella Nota III. Se in tutto quanto è esposto ai nn. 12 e 13, sostituiamo alle funzioni $\mathrm{K}(s, t)$ e $k(s)$ rispettivamente $\mathrm{P}(s, t)$ e $p(s)$, possiamo formare le $\mathrm{D}_n(s, t)$, e non sarà $\mathrm{D}_2(s, t) = 0$, perchè allora non esisterebbe nessuna costante caratteristica propria diversa dalle μ_n, tranne eventualmente lo zero, mentre esiste la costante $\lambda < 0$.

Determineremo così un numero d tale che, qualunque sia la costante caratteristica μ relativa a $\mathrm{P}(s, t)$ e $p(s)$, diversa dalle μ_n, si avrà $\mu^2 \leq d$. Sarà dunque $\lambda^2 \leq d$.

Ma non può essere $\lambda^2 < d$, perchè allora, per la (31), si potrebbe determinare $\varepsilon > 0$ in modo da avere quasi dapertutto $d > p^2(s) + \varepsilon$; quindi $\sqrt{d}$, presa con segno conveniente, sarebbe una costante caratteristica soddisfacente alla (33). Allora sarebbe $\sqrt{d} = \mu_i$ e si verrebbe a determinare una funzione caratteristica $\mathrm{R}(s, t)$, corrispondente a $\sqrt{d}$, per la quale si avrebbe $\int_a^b \Gamma_i(v, s)\, \mathrm{R}(v, t)\, dv = 0$. Ma si dovrebbe anche avere

$$\left(\sqrt{d} - p(s)\right) \mathrm{R}(s, t) = \int_a^b \Gamma_i(v, s)\, \mathrm{R}(v, t)\, dv \quad \text{e} \quad \left(\sqrt{d} - p(s)\right) \mathrm{R}(s, t) =$$
$$= \int_a^b \mathrm{R}(v, s)\, \mathrm{R}(v, t)\, dv , \quad \text{quindi} \quad \int_a^b \mathrm{R}(v, s)\, \mathrm{R}(v, t)\, dv = 0 ,$$

e finalmente $\mathrm{R}(s, t) = 0$.

Sarà dunque $\lambda^2 = d$ e perciò anche in questo secondo caso, per l'osservazione del n. 16, si può determinare una funzione $\Gamma(s, t)$, caratteristica relativamente a $P(s, t)$ e $p(s)$, corrispondente alla costante λ. $\Gamma(s, t)$ sarà pure funzione caratteristica relativa a $P(s, t)$ e $(k(s) - c)^2$ corrispondente alla costante zero e si potrà porre

$$\Gamma(s, t) \sim - \sum_{m=1}^{\infty} (k(t) - c)^2 \, \psi_m(s) \, \psi_m(t) \,,$$

le $\psi_m(s)$ formando un sistema ortogonale. Esse sono funzioni fondamentali proprie relative a $P(s, t)$ e $(k(s) - c)^2$, corrispondenti alla costante zero, perciò saranno pure fondamentali relativamente a $K(s, t)$ e $k(s) - c$ e corrisponderanno alla costante zero, cioè, finalmente, sono fondamentali relativamente a $K(s, t)$ e $k(s)$ e corrispondenti alla costante c.

La successione delle somme parziali della serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} (c - k(t)) \, \psi_m(s) \, \psi_m(t)$$

converge in media verso una funzione $H(s, t)$ e si avrà

$$\Gamma(s, t) = - (c - k(t)) \, H(s, t) \,.$$

Si ha evidentemente

$$(c - k(s)) \, H(s, t) = \int_a^b K(s, v) \, H(v, t) \, dv \,.$$

Inoltre, se $\varphi(s)$ è una funzione fondamentale relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$ corrispondente a c, sarà pure fondamentale relativamente a $P(s, t)$ e $(k(s) - c)^2$ e corrispondente a zero, e perciò si avrà

$$- (k(s) - c)^2 \, \varphi(s) = \int_a^b \Gamma(t, s) \, \varphi(t) \, dt \,,$$

cioè

$$- (k(s) - c)^2 \, \varphi(s) = (k(s) - c) \int_a^b H(t, s) \, \varphi(t) \, dt \,,$$

quindi, quasi dapertutto nell'insieme dei punti s dove è $k(s) \neq c$

$$(c - k(s)) \, \varphi(s) = \int_a^b H(t, s) \, \varphi(t) \, dt \,.$$

Ma questa eguaglianza è soddisfatta anche quasi dapertutto nell'insieme dei punti s dove è $k(s) = c$, perchè allora tanto il primo che il secondo membro hanno valore nullo [1].

Concludiamo finalmente che $H(s, t)$ è funzione caratteristica relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$, corrispondente alla costante c.

È poi facile dimostrare che *ad una costante caratteristica corrisponde una funzione caratteristica unica.*

[1] $\int_a^b H(t, s) \, \varphi(t) \, dt$ non è altro che la funzione verso cui converge in media la successione delle somme parziali della serie $\sum_{m=1}^{\infty} (c - k(s)) \, \psi_m(s) \int_a^b \psi_m(s) \, \varphi(s) \, ds$.