ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

Matematica. — *Condizione necessaria e sufficiente per la derivabilità termine a termine di una serie di funzioni.* Nota di GUSTAVO SANNIA, presentata dal Socio ENRICO D'OVIDIO.

1. I termini di una serie di funzioni

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots, \tag{1}$$

convergente in un intervallo (a, b), ammettano derivata in un punto $x = c$ dell'intervallo. Allora una quistione importante (fin qui rimasta insoluta) è di assegnare la condizione *necessaria e sufficiente* affinchè la serie delle derivate

$$u'_1 + u'_2 + \cdots + u'_n + \cdots \tag{2}$$

sia convergente e rappresenti la derivata nel punto c della somma $u(x)$ della (1).

Questa condizione è la seguente:

Dati due numeri positivi ε ed N, deve esistere un numero intero n maggiore di N, tale che, per ogni valore, finito o infinito, del numero intero positivo p esista un intorno I_p [1] *di c in tutti i punti x del quale (escluso c) risulti*

$$\left| \frac{[u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)] - [u_{n+1}(c) + \cdots + u_{n+p}(c)]}{x - c} \right| < \varepsilon . \tag{3}$$

Essa risulta dai due teoremi seguenti:

Affinchè la (2) sia convergente è necessario e sufficiente che, dato un numero positivo ε, esista un numero intero positivo n (maggiore, se si vuole, di un numero positivo assegnato N) tale che, per ogni valore finito dell'intero positivo p, esista un intorno I_p di c, in tutti i punti x del quale (escluso c) sussista la (3).

Infatti, affinchè la (2) sia convergente è necessario e sufficiente che, dato $\varepsilon > 0$, esista un intero positivo n (maggiore, se si vuole, di un numero positivo assegnato N) tale che, per ogni valore finito del numero intero positivo p, risulti

$$| u'_{n+1} + \cdots + u'_{n+p} | < \varepsilon$$

ossia

$$\left| \lim_{x=c} \frac{[u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)] - [u_{n+1}(c) + \cdots + u_{n+p}(c)]}{x - c} \right| < \varepsilon ; \tag{4}$$

[1] Intorno *sinistro* (*destro*) di c, se si considerano soltanto le derivate a sinistra (a destra) del punto c.

ed affinchè la (4) si verifichi è necessario e sufficiente che esista un intorno I_p di c in tutti i punti x del quale sia soddisfatta la (3).

Se la serie (2) *è convergente, affinchè la sua somma sia la derivata nel punto c della somma $u(x)$ della* (1) *è necessario e sufficiente che, dati due numeri positivi ε e* N, *esista un numero intero n maggiore di* N *tale che, in tutti i punti x di un intorno I_∞ di c (escluso c), risulti*

$$(5)\qquad \left|\frac{u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots]-[u_{n+1}(c)+u_{n+2}(c)+\cdots]}{x-c}\right|<\varepsilon \text{ [1]}.$$

Detto $r_n(x)$ il resto della (1) dopo il termine $u_n(x)$, la (5) può scriversi

$$(5)'\qquad \left|\frac{r_n(x)-r_n(c)}{x-c}\right|<\varepsilon .$$

La condizione enunciata è necessaria. Infatti, se la somma u' della (2) è la derivata nel punto c della somma $u(x)$ della (1), dato $\varepsilon>0$, esiste un intorno I' di c nei punti x del quale (c escluso) si ha

$$(6)\qquad \left|\frac{u(x)-u(c)}{x-c}-u'\right|<\frac{\varepsilon}{3};$$

inoltre si può trovare un intero n, maggiore di un numero positivo prefissato N, tale che sia

$$(7)\qquad |u'-s'_n|<\frac{\varepsilon}{3}\quad,\quad (s'_n=u'_1+\cdots+u'_n);$$

e poichè la funzione $s_n(x)=u_1(x)+\cdots+u_n(x)$ ha per derivata s'_n nel punto c, si ha pure

$$(8)\qquad \left|s'_n-\frac{s_n(x)-s_n(c)}{x-c}\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

in un intorno I'' di c (escluso c).

Dalle disuguaglianze (6), (7), (8) e

$$\left|\frac{r_n(x)-r_n(c)}{x-c}\right|\leq\left|\frac{u(x)-u(c)}{x-c}-u'\right|+|u'-s'_n|+\left|s'_n-\frac{s_n(x)-s_n(c)}{x-c}\right|$$

segue che la $(5)'\equiv(5)$ è soddisfatta in tutti i punti x del più piccolo I_∞ dei due intorni I' e I'' di c.

La condizione è sufficiente. Infatti, poichè u' è la somma della (2), dato $\varepsilon>0$, esiste un numero positivo N, tale che valga la (7) per ogni intero n maggiore di esso; e se la condizione enunciata è soddisfatta, si

[1] Questa condizione non è che il limite della precedente per $p=+\infty$.

può scegliere uno di questi valori di n per modo che la (5) $\equiv$ (5)$'$ sia soddisfatta in un intorno I_∞ di c; infine, poichè s'_n è la derivata di $s_n(x)$ in c, vale la (8) in un intorno I'' di c.

Dalle (5)$'$, (7), (8) e

$$\left|\frac{u(x)-u(c)}{x-c}-u'\right| \leq \left|\frac{s_n(x)-s_n(c)}{x-c}-s'_n\right| + |s'_n - u'| + \left|\frac{r_n(x)-r_n(c)}{x-c}\right|$$

segue che

$$\left|\frac{u(x)-u(c)}{x-c}-u'\right| < \varepsilon$$

nel più piccolo degli intorni I_p ed I'' di c, ossia che u' è la derivata di $u(x)$ nel punto c.

2. Supponiamo ora che i termini della serie (1) siano derivabili *in tutti i punti* dell'intervallo (a, b).

Affinchè la serie delle derivate

$$u'_1(x) + u'_2(x) + \cdots + u'_n(x) + \cdots \tag{9}$$

sia convergente e rappresenti la derivata della somma della (1) *in tutti i punti dell'intervallo* (a, b), *è sufficiente che: dati due numeri positivi* ε *e* N, *si possa decomporre l'intervallo* (a, b) *in un numero finito di parti* $P_1, P_2, \ldots P_r$ *e si possano trovare altrettanti numeri interi* $n_1, n_2, \ldots n_r$ *(distinti o non) maggiori di* N, *per modo che risulti*

$$\left|\frac{[u_{n_s+1}(x_1) + \cdots + u_{n_s+p}(x_1)] - [u_{n_s+1}(x_2) + \cdots + u_{n_s+p}(x_2)]}{x_1 - x_2}\right| < \varepsilon \tag{10}$$

per ogni valore finito o infinito dell'intero positivo p *e per ogni coppia di punti* x_1, x_2 *della parte* P_s $(s = 1, 2, \ldots, r)$.

Supponiamo che questa condizione sia soddisfatta e che, dati ε e N, si siano costruite le parti $P_1, \ldots, P_r$ e si siano scelti i numeri $n_1, \ldots, n_r$.

Sia x_1 un punto fisso di (a, b). Esso apparterrà ad una parte P_s e la (10) varrà in ogni punto $x_2 \neq x_1$ di P_s e per ogni valore, finito o non, di p. Se x_1 è interno a P_s in senso stretto, ciò basta per asserire che la (9) è convergente per $x = x_1$ e che la sua somma $u'(x_1)$ è la derivata della somma $u(x)$ di (1) per $x = x_1$. (Perchè è soddisfatta la condizione enunciata in principio del n. 1 per $n = n_s$ e $I_p = P_s$). Se invece x_1 è l'estremo sinistro (destro) di P_s, ciò permette di asserire soltanto che $u'(x_1)$ è la derivata di $u(x)$ a destra (a sinistra) del punto x_1; ma in tal caso x_1 è pure l'estremo destro di P_{s-1} (sinistro di P_{s+1}), se non cade in a o in b, dunque $u'(x_1)$ è anche la derivata di $u(x)$ a sinistra (a destra) del punto x_1.