ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

Meccanica. — *Sul problema delle coazioni elastiche*. Nota I di Gustavo Colonnetti, presentata dal Socio V. Volterra.

In un solido elastico in equilibrio nel suo stato naturale — il quale, per quanto non sollecitato da alcuna forza esterna, si presenti in istato di coazione interna [1] — immaginiamo di praticare un taglio.

In generale le due faccie del taglio, appena rese indipendenti l'una dall'altra, si sposteranno l'una rispetto all'altra, deformandosi, fino a che il solido abbia raggiunta la sua nuova configurazione di equilibrio.

Questa osservazione elementarissima serve non di rado ai tecnici per riconoscere l'esistenza degli stati di coazione, e qualche sperimentatore, operando su casi particolarmente semplici (anelli temprati), è anche riuscito a trarre, da un esame sommario della suaccennata variazione di configurazione, alcune pratiche conclusioni in ordine alla buona riuscita dei trattamenti termici [2].

Io mi propongo qui di dimostrare come, da un esatto rilevamento sperimentale degli spostamenti relativi dei singoli punti delle due faccie del taglio, si possa, anche nei casi più generali e complessi, risalire alla identificazione del sistema di tensioni interne che inizialmente si trasmettevano attraverso ad esso.

La risoluzione di un tale problema viene a dipendere, come si vedrà, dalla conoscenza di certe particolari distorsioni relative a quel medesimo taglio.

Così le belle, ed ormai classiche ricerche del Volterra [3], delle quali io ho già avuto occasione alcuni anni or sono di rilevare la stretta connessione con certe teorie dell'influenza dei carichi mobili verso le quali si va ogni giorno più decisamente orientando la moderna scienza delle costruzioni [4], si presentano ora come il prezioso punto di appoggio da cui si

(1) G. Colonnetti, *Su certi stati di coazione elastica che non dipendono da azioni esterne*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. XXVI (1917), 2° sem.; *Su di una particolare classe di coazioni elastiche che si incontra nello studio della resistenza delle artiglierie*, id., vol. XXVII (1918), 2° sem.; *Una proprietà caratteristica delle coazioni elastiche nei solidi elasticamente omogenei*, id., vol. XXVII (1918), 2° sem.

(2) H. Le Chatelier et L. Guillet, *Sur le traitement thermique des obus*, Paris, Min. de la Guerre, 1916.

(3) V. Volterra, *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes*, Annales de l'École Normale, 3, XXIV (septembre 1907).

(4) G. Colonnetti, *Su di una reciprocità tra deformazioni e distorsioni*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. XXIV (1915), 1° sem.; *Principii di statica dei solidi elastici*, Pisa, 1916.

può utilmente prendere le mosse nello studio delle coazioni elastiche più generali.

Denotiamo con V lo spazio, connesso, occupato dal solido, e con Σ la superficie (od, occorrendo, il complesso di superficie) lungo cui il solido si intende tagliato.

Siano

$$u\ ,\ v\ ,\ w$$

le componenti secondo gli assi degli spostamenti che bisogna imprimere ai singoli punti del solido tagliato ed in equilibrio per riportarli nelle posizioni che essi occupavano prima del taglio.

Noi riterremo queste componenti funzioni delle coordinate, soddisfacenti a tutte le abituali restrizioni della teoria classica dell'elasticità in tutti i punti del solido tagliato, vale a dire in tutti i punti dello spazio V eccezion fatta soltanto per quelli che appartengono alla superficie Σ, attraverso la quale le u, v, w presenteranno in generale delle discontinuità.

Denoteremo con

$$\Delta u = u_\beta - u_\alpha\ ,\quad \Delta v = v_\beta - v_\alpha\ ,\quad \Delta w = w_\beta - w_\alpha$$

queste discontinuità, cioè le differenze fra i valori che alle u, v, w competono in un punto generico della superficie Σ considerato come appartenente ad una data faccia del taglio (faccia β), ed i valori che spettano alle stesse funzioni nel medesimo punto considerato come appartenente all'altra faccia (faccia α); e considereremo tali discontinuità come date in ciascun caso concreto; supporremo per esempio di averle rilevate sperimentalmente sotto forma di spostamenti relativi delle singole coppie di punti già affacciati sulle due faccie del taglio.

Tutti sanno che il primitivo stato di equilibrio si può sempre integralmente ripristinare nel solido tagliato, applicando alle due faccie del taglio due distribuzioni di forze ovunque equivalenti alle tensioni interne che nel solido dato inizialmente si trasmettevano attraverso la superficie Σ; e che, nei riguardi del solido tagliato, queste forze sono da considerarsi come delle vere e proprie forze esterne.

A somiglianza di quanto abbiamo già fatto nelle Note precedenti, noi riterremo le loro tre componenti (riferite all'unità di superficie)

$$P_x\ ,\ P_y\ ,\ P_z$$

funzioni esse pure delle coordinate, definite in ogni punto di Σ e riferite a quella faccia del taglio che abbiamo già designata col nome di faccia α, intendendo che sull'altra faccia (faccia β) le analoghe componenti siano rispettivamente (¹)

$$-P_x \ , \ -P_y \ , \ -P_z \, .$$

Calcolare le P_x, P_y, P_z in funzione delle $\Delta u, \Delta v, \Delta w$, ecco il nostro problema; ed esso consiste nel calcolare una distorsione — intesa, sia pure, nel senso più generale della parola — distorsione che, sovrapponendosi allo stato di coazione eventualmente residuo nel solido tagliato, riprodurrà poi identicamente la coazione iniziale data, colla quale essa ha in comune lo stato di tensione relativo alla superficie Σ.

Resta così acquisito un primo, importante risultato, che si può brevemente enunciare così:

Data in un solido elastico una qualsiasi coazione — cioè uno stato di tensione interna in equilibrio per forze esterne tutte nulle — e tracciato attraverso ad esso un diaframma Σ ad arbitrio, esiste sempre una distorsione la quale riproduce identicamente lo stato di tensione relativo a Σ, ed è definita da quelle medesime discontinuità di spostamenti che il solido spontaneamente presenta se, praticato un taglio in corrispondenza di Σ, e liberate le due faccie del taglio da ogni mutua azione, si lascia che il sistema assuma il suo nuovo stato di equilibrio.

Ciò premesso, faremo un primo passo sulla via della identificazione delle P_x, P_y, P_z dimostrando che:

il calcolo delle sei caratteristiche (componenti secondo gli assi coordinati, e momenti rispetto agli stessi) di un tale sistema di forze può sempre ricondursi a quello di sei distorsioni elementari di Volterra.

Invero, per ogni nuovo stato di coazione — i cui parametri, relativi sempre allo stesso diaframma Σ, contrassegneremo (per distinguerli) con un apice — sussiste il teorema di Betti (²):

$$\int_\Sigma (P_x \Delta u' + P_y \Delta v' + P_z \Delta w')\, d\Sigma = \int_\Sigma (P'_x \Delta u + P'_y \Delta v + P'_z \Delta w)\, d\Sigma \, .$$

Supponiamo che la nuova coazione sia semplicemente una distorsione di Volterra, ossia poniamo

$$\begin{aligned} \Delta u' &= l' + q'z - r'y \\ \Delta v' &= m' + r'x - p'z \\ \Delta w' &= n' + p'y - q'x \end{aligned}$$

(¹) Cfr. G. A. Maggi, *Dinamica dei sistemi*, Pisa, 1917, § 23.

(²) Cfr. G. A. Maggi, *Dinamica dei sistemi*, Pisa, 1917, § 136 e 137. Una dimostrazione diretta si otterrebbe facilmente procedendo in modo affatto analogo a quello adottato dal Volterra nella sua Nota: *Sulle distorsioni dei solidi elastici più volte connessi*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. XIV (1905), 1° sem.

con l', m', n', p', q', r' (caratteristiche della distorsione) costanti, cioè indipendenti dalle coordinate.

Allora il primo membro dell'equazione di Betti assume la forma:

$$l' \int_\Sigma P_x \, d\Sigma + m' \int_\Sigma P_y \, d\Sigma + n' \int_\Sigma P_z \, d\Sigma +$$

$$+ p' \int_\Sigma (P_z y - P_y z) \, d\Sigma + q' \int_\Sigma (P_x z - P_z x) \, d\Sigma + r' \int_\Sigma (P_y x - P_x y) \, d\Sigma$$

epperò si può ridurre a misurare una qualunque delle componenti secondo gli assi (ovvero dei momenti rispetto agli stessi) del sistema di tensioni incognite P_x, P_y, P_z ove si assumano per caratteristiche della distorsione

$$l' = 1 \quad , \quad m' = n' = p' = q' = r' = 0$$

e successivamente:

$$m' = 1 \quad , \quad l' = n' = p' = q' = r' = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r' = 1 \quad , \quad l' = m' = n' = p' = q' = 0$$

E quelle componenti (e quei momenti) riusciranno così completamente determinate essendo il secondo membro dell'equazione di Betti da considerarsi come noto nei singoli casi particolari (sempre quando gli spostamenti relativi $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ siano stati, come noi abbiamo supposto, punto per punto sperimentalmente rilevati) se si sanno calcolare le tensioni P'_x, P'_y, P'_z determinate in corrispondenza di Σ dalle singole distorsioni elementari sopra indicate.

Occorre appena avvertire che, nel caso particolare in cui, per effetto del taglio, il solido cessasse di essere connesso, ogni distorsione di Volterra degenererebbe necessariamente in un semplice moto rigido relativo di una parte del solido rispetto all'altra, e le P'_x, P'_y, P'_z riescirebbero tutte nulle.

Se ne conclude che, in tal caso, devono essere identicamente nulle anche le sei caratteristiche del sistema di tensioni P_x, P_y, P_z come era del resto facilmente dimostrabile anche per via diretta, dato che questo sistema di tensioni deve per ipotesi sussistere in istato di equilibrio per forze esterne tutte nulle.