ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

analiticamente lungo tutto il semiasse reale positivo ($x \geq 0$) *ed ivi regolari.*

Ho dimostrato infatti in una recente Memoria [1] che ciò non turba la teoria generale (aritmetica) del metodo di sommazione Bg. Orbene ciò non turba neppure la teoria delle serie di potenze [2].

Matematica. — *Sur certaines familles de fonctions.* Nota di Joseph Pérès, presentata dal Socio V. Volterra [3].

1. J'ai indiqué ailleurs [4] l'intérêt que présentent les familles de fonctions

$$(1) \qquad f_n(t) = t^n + \int_0^t \tau^n \, \mathrm{K}(\tau\,,t)\, d\tau \qquad (n = 0\,,1\,,2\,,\ldots,\infty)$$

et j'ai étudié les relations entre les fonctions $f_n(t)$ et $\mathrm{K}(\tau\,,t)$ dans le cas où ces fonctions sont holomorphes dans le domaine de l'origine.

Le forme caractéristique des f_n que j'ai indiquée [5] met en évidence, certaines relations simples entre les f_n et $\mathrm{K}(\tau\,,t)$. Elle présente l'avantage de permettre, dans une certaine mesure, l'abandon de l'hypothèse d'analyticité. Mais surtout elle s'applique très aisément à l'étude de familles de fonctions (1) déduites de la théorie des fonctions permutables. C'est ainsi qu'on en déduira, presque sans calculs, que les fonctions

$$f(t)\,,\ \dot{f}^2(t)\,,\ \ldots\ \dot{f}^n(t)\,,\ \ldots\,,$$

ou les fonctions

$$\psi(t)\,,\ \dot{\psi}\dot{f}(t)\,,\ \ldots\ \dot{\psi}\dot{f}^n(t)\,,\ \ldots\,,$$

déduites par composition de deux fonctions f et ψ permutables avec l'unité forment des familles (2); on obtiendra immédiatement les noyaux correspondants.

(1) Di prossima pubblicazione in una raccolta di *Scritti matematici dedicati ad Enrico d'Ovidio in occasione del Suo LXXV compleanno* (Bocca, Torino).

(2) Soltanto il lemma del n. 9 della Nota citata al n. 10 (e che poi si invoca nei nn. 13 e 19) va sostituito col seguente: *se in un punto* $z_0 \neq 0$ *una delle serie* (24) *associate alla* (1) *soddisfa la condizione* C), *tutte le serie* (24) *la soddisfanno ed in ogni punto* z *del segmento che unisce il punto* z_0 *al punto* $z = 0$.
Si dimostra facilmente allo stesso modo.

(3) Pervenuta all'Accademia il 13 luglio 1918.

(4) Comptes rendus de l'Académie des Sciences, tom. 166, pp. 723 et 806.

(5) Ibid., pag. 806.

On démontrera aussi que l'on a

$$f_n(t) = t^n \left\{ 1 + \sum_0^\infty{}_q\, t^{q+1} B_q(n) \right\} \tag{2}$$

avec

$$B_q(n) = \frac{P_q(n)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+q+1)}$$

P_q étant un polynôme en n de degré inférieur ou égal à q.

2. Cherchons, plus généralement, la forme des fonctions données par les formules

$$f_n(t) = t^n \lambda(t) + \int_0^t \tau^n \left(\frac{\tau}{t}\right)^p K(\tau, t)\, d\tau, \quad (n = 0, 1, \ldots, \infty), \tag{3}$$

où l'on suppose λ et $K(\tau, t)$ holomorphes autour de l'origine.

En posant

$$\lambda(t) = 1 + \sum_1^\infty{}_q\, d_q t^q$$

$$K(\tau, t) = \sum_0^\infty{}_{r,s}\, A_{rs} \tau^r t^s,$$

il vient

$$f_n(t) = t^n + \sum_0^\infty{}_q\, t^{n+q+1} \left(d_{q+1} + \sum_{r+s=q} \frac{A_{r.s}}{(n+p+r+1)} \right) :$$

Donc

$$f_n(t) = t^n + \sum_0^\infty{}_q\, t^{n+q+1} \frac{P_q(n)}{(n+p+1)(n+p+2)\ldots(n+p+q+1)} \tag{4}$$

$P_q(n)$ étant un polynome de degré $(q+1)$ au plus.

En nommant $B_q(n)$ le coefficient de t^{n+q+1} dans $f_n(t)$, on constate qu'il est possible de déterminer des constantes M et R de façon que

$$|B_q(n)| < \frac{M}{R^q}. \tag{5}$$

Inversement, des fonctions $f_n(t)$ données par les formules (4) avec les inégalités (5) peuvent toujours se mettre sous la forme (3), λ et K étant holomorphes autour de l'origine. On a d'ailleurs

$$\lambda(t) = \lim_{n=\infty} t^{-n} f_n(t).$$

Les développement en série d'une fonction arbitraire suivant les fonctions $f_n(t)$ s'étudieront comme je l'ai déja indiqué dans des cas analogues.

3. Comme exemple d'une famille de fonctions du type (3), on peut indiquer

$$f_n(\zeta) = \zeta^n \, F(a, n, 1 + p + n, \zeta),$$

où F désigne la série hypergéométrique

$$F(a, b, c, \zeta) = 1 + \zeta \frac{a \cdot b}{1 \cdot c} + \zeta^2 \frac{a(a+1)\, b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)} + \cdots.$$

On a alors

$$\lambda(t) = \frac{1}{(1-t)^a}.$$

4. La formule

$$\frac{1}{1-\zeta t} = f_0(t)\, \varphi_0(\zeta) + f_1(t)\, \varphi_1(\zeta) + \cdots + f_n(t)\, \varphi_n(\zeta) + \cdots$$

permet d'associer aux fonctions $f_n(t)$ du n° 2 des fonctions $\varphi_n(\zeta)$; $\varphi_n(\zeta)$ étant un polynome de degré n [1]. Je n'ai pas à revenir ici sur l'intérêt de ces nouvelles fonctions.

Dans le cas du n° 2 on constatera que

$$(6) \quad \begin{cases} \varphi_0(\zeta) = 1 \\ \varphi_n(\zeta) = C_n(0) + C_{n-1}(1)\, \zeta + C_{n-2}(2)\, \zeta^2 + \cdots + C_1(n-1)\, \zeta^{n-1} + \zeta^n, \end{cases}$$

avec

$$C_s(r) = \frac{\pi_s(r)}{(r+p+1)(r+p+2)\ldots(r+p+s)},$$

π_s étant un polynome en r de degré s au plus. On a d'ailleurs

$$(7) \qquad |C_s(r)| < \frac{M'}{R'^s}$$

et les formules (6) et (7) caractérisent les φ_n.

5. En particulier, on associera aux fonctions f_n du n° 3 les polynomes

$$\varphi_n(\zeta) = \zeta^n \, F\left(-a, -n+1, -n-p, \frac{1}{\zeta}\right).$$

[1] Ces fonctions associées ont été introduites par M. Pincherle, Rend. R. Istituto Lombardo (Milano), 1882.

E. M.