ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

con acido peracetico ed è caratteristico per la facilità con cui fornisce prodotti colorati in azzurro.

Accenneremo, infine, che i neri di pirrolo, a somiglianza dei neri di anilina, reagiscono con tutta facilità anche con la fenilidrazina; sopra i prodotti che in tal modo si formano riferiremo in altre comunicazioni.

Geometria. — *Fondamenti della geometria proiettivo-differenziale dei complessi e delle congruenze di rette.* Nota I del Corrispondente Guido Fubini.

1. Scopo della presente ricerca è di dare un sistema di forme differenziali del primo ordine invarianti per collineazioni, e di significato *intrinseco* (cioè indipendente dalla scelta delle variabili coordinate) per individuare una congruenza od un complesso di rette, di interpretare geometricamente i risultati ottenuti, di scrivere le equazioni differenziali che dalle forme citate permettono di risalire alla congruenza o complesso; le condizioni di integrabilità relative sono nella geom. proiettiva dei sistemi di rette *l'analogo delle equazioni di Gauss e Codazzi* nella geom. metrica delle superficie. Tali forme sono tre di secondo grado, legate da certe condizioni di coniugio (apolarità), o, se si vuole, sono nel caso di congruenze due sole forme, una di secondo, ed una di quarto grado. *La ricerca di tutti gli invarianti proiettivi di una congruenza o complesso è così ridotta alla ricerca*, che si sa eseguire con metodi classici, *degli invarianti di un tale sistema di forme.* Le prime due forme relative a un complesso si conservano non solo per collineazioni, ma anche *per deformazioni proiettive* e possono definire delle geometrie metriche *completamente determinate dal complesso e che si conservano in tali trasformazioni.* Queste due forme quadratiche determinano tre sistemi di ∞^1 rigate del complesso, che sono l'analogo delle linee di curvatura di una superficie; non sarebbe difficile estendere sia ai complessi che alle congruenze le nozioni di geodetiche, di curvatura, ecc., svolgendo per essi una teoria analoga a quella che si svolge per le superficie. I metodi che io espongo in una mia Memoria in corso di stampa negli Annali di Matematica potrebbero servire p. es. a determinare tutti i complessi con un gruppo continuo di Lie di deformazioni proiettive in se stessi, ecc. ecc.

Uso l'algoritmo del calcolo assoluto di Ricci e i differenziali controvarianti [1]; a proposito dei quali ci basti ricordare che, se x è una funzione delle u_r, allora la formula elementare $d^2x = \Sigma x_i\, d^2 u_i + \Sigma x_{rs}\, du_r\, du_s$ con-

[1] Cfr. una mia Nota in corso di stampa negli Atti della R. Accad. d. Scienze di Torino.

tinua a valere se al posto delle x_{rs} e delle d^2u si scrivono le derivate covarianti, e i differenziali controvarianti.

I metodi qui esposti si possono applicare a *tutti i problemi relativi ad enti geometrici, le cui coordinate sono legate da una relazione quadratica*: p. es. alle ipersuperficie, e ai sistemi di sfere o ipersfere rispetto al gruppo conforme di uno spazio euclideo [1].

2. *Sistemi di rette.* Indicheremo le coordinate proiettive di rette con x, y, z, p, q, r supposte legate dalla [2]

$$\mathrm{S}x^2 = x^2 + y^2 + z^2 + p^2 + q^2 + r^2 = 0. \tag{1}$$

Non si introdurranno però inutilmente quantità complesse, perchè avremo cura di far comparire soltanto quadrati delle p, q, r, e delle loro derivate.

Un sistema di rette si definirà dando le x, ecc. (cioè le $x, y, \ldots, r$) in funzione di n parametri u_i $(i = 1, \ldots, n)$. È $n = 1$ per le superficie rigate, che noi qui non studiamo; è $n = 2$ per le congruenze; $n = 3$ per i complessi. Evidentemente da (1) segue

$$\mathrm{S}x\, x_j = 0 \qquad (j \leq n). \tag{2}$$

Porremo

$$\varphi = \Sigma a_{js}\, du_j\, du_s = \mathrm{S}dx^2\,; \tag{3}$$

ne supporremo *il discriminante* $\Delta \neq 0$ (col che escludiamo le congruenze a falde focali coincidenti, e i complessi delle tangenti a una superficie); indicheremo con A_{js} il complemento algebrico di a_{js} in Δ, diviso per Δ, con $\left\{\begin{matrix} ik \\ l \end{matrix}\right\}$ i simboli di Christoffel di seconda specie. Da (2), (3) si deduce, usando derivate covarianti secondo φ:

$$a_{js} = \mathrm{S}x_j\, x_s = -\mathrm{S}x\, x_{js}\,;\ \mathrm{S}x_j\, x_{st} + \mathrm{S}x_s\, x_{jt} = -\,\mathrm{S}x_t\, x_{js} - \mathrm{S}x\, x_{jst} = a_{jst} = 0 \tag{4}$$

(perchè le derivate covarianti di a_{js} sono nulle). Se ne deduce tosto:

$$\mathrm{S}x_j\, x_{st} = \mathrm{S}x\, x_{jst} = 0\,. \tag{5}$$

Porremo:

$$\Delta_2 x = \Sigma\, \mathrm{A}_{js}\, x_{js}\,;\ \Delta_1 x = \Sigma\, \mathrm{A}_{js}\, x_j\, x_s\,;\ \mathrm{D}_2 x = \Sigma x_{js}\, du_j\, du_s\,; \tag{6}$$
$$\mathrm{D}_3 x = \Sigma x_{jst}\, du_j\, du_s\, du_t\,.$$

[1] Per le superficie dello spazio ordinario non si troverebbe nulla di nuovo. Cfr. l'ultimo paragrafo della mia Mem.: *Applicabilità proiettiva di due superficie* (Rend. del Circ. Matem. di Palermo, 1916, tomo 41).

[2] Una somma sarà indicata con S, o con Σ secondo che i suoi addendi si ottengono l'uno dall'altro sostituendo alla x le y, z, ecc., oppure facendo variare gli indici.

Per (5) sarà

$$-\,\mathrm{S}x_{jh}\,x_{st} = \mathrm{S}x_j\,x_{sth}\,, \tag{7}$$

donde

$$-\,\mathrm{S}(\mathrm{D}_2 x)^2 = \mathrm{S}dx\,\mathrm{D}_3 x\,. \tag{8}$$

Le coordinate $x, y, \ldots$ sono *determinate a meno di un fattore*: che cosa avviene se ad esse sostituiamo le $\overline{x} = \varrho x$, $\overline{y} = \varrho y$ ecc.? Il nuovo valore $\overline{\varphi}$ della (3) è evidentemente $\varrho^2\varphi$; le $\overline{x}_{rs}$ saranno le derivate covarianti di $\overline{x} = \varrho x$ rispetto non più alla φ, ma alla $\overline{\varphi} = \varrho^2\varphi$. Si trova facilmente, ponendo $\varepsilon_{hh} = 1$, $\varepsilon_{hk} = 0$ per $h \neq k$, e indicando con un soprassegno i nuovi valori delle nostre espressioni, che:

$$\tag{9}\left\{\begin{aligned}
&\overline{x} = \varrho x\;;\; \overline{\varphi} = \varrho^2\varphi\;;\; \overline{\mathrm{A}}_{hk} = \frac{1}{\varrho^2}\,a_{hk}\;;\; \overline{\varDelta} = \varrho^3\varDelta\;;\; \overline{a}_{rs} = \varrho^2\,a_{rs}\\
&\overline{\binom{hk}{l}} = \binom{hk}{l} + \varepsilon_{hl}(\log\varrho)_k + \varepsilon_{hl}(\log\varrho)_k - a_{hk}\sum_m \mathrm{A}_{lm}(\log\varrho)_m\\
&\overline{x}_{rs} = \varrho\,x_{rs} + x\left(\varrho_{rs} - \frac{2}{\varrho}\,\varrho_r\,\varrho_s + \frac{1}{\varrho}\,a_{rs}\,\varDelta_1\varrho\right) + a_{rs}\sum_{l,m}\mathrm{A}_{lm}\,\varrho_l\,x_m\\
&\overline{\varDelta_2 x} = \frac{1}{\varrho}\,\varDelta_2 x + x\left(\frac{1}{\varrho^2}\,\varDelta_2\varrho + \frac{n-2}{\varrho}\,\varDelta_1\log\varrho\right) + \frac{n}{\varrho^2}\,\Sigma\,\mathrm{A}_{lm}\,\varrho_l\,x_m\\
&\overline{\mathrm{D}_2 x} = \varrho\,\mathrm{D}_2 x + x\left(\mathrm{D}_2\varrho - \frac{2}{\varrho}\,d\varrho^2\right) + \frac{\varphi}{\varrho}\,x\,\varDelta_1\varrho + \varphi\,\Sigma\,\mathrm{A}_{lm}\,\varrho_l\,x_m
\end{aligned}\right.$$

(e analoghe in y, ecc.; si noti che ϱ_{rs} è calcolato secondo φ).

Ne deduciamo subito alcune conseguenze. Si ponga:

$$\mathrm{X} = \frac{1}{n}\,\varDelta_2 x \qquad \text{donde}\;\; \mathrm{S\,X}x = -1 \qquad \mathrm{S\,X}x_j = 0\,. \tag{10}$$

Per ogni valore di r, s, il complesso lineare di coordinate $\overline{x}_{rs} - \overline{a}_{rs}\,\overline{\mathrm{X}}$, ecc., varia nel fascio di complessi determinato dal complesso di coordinate $x_{rs} - \mathrm{X}\,a_{rs}$ ecc. e dal complesso (speciale) *di coordinate x*, ecc. (Con l'ecc. indico le quantità dedotte sostituendo $y, z, p, \ldots$ alla x).

$$\tag{11}\begin{aligned}\overline{x}_{rs} - \overline{a}_{rs}\,\overline{\mathrm{X}} = \varrho\,(x_{rs} - a_{rs}\,\mathrm{X}) &+\\ + x\left[\varrho_{rs} - \frac{2}{\varrho}\,\varrho_r\,\varrho_s + \frac{2}{n}\,a_{rs}\,\varDelta_1\varrho - \frac{a_{rs}}{n}\,\varDelta_2\varrho\right]&.\end{aligned}$$

Il complesso di coordinate $\overline{\mathrm{X}}$, ecc. varia nel sistema lineare individuato dai complessi x, x_s, X. Questo sistema lineare è proprio ∞^{n+1}, perchè le x, x_s, X formano $n+2$ sistemi linearmente indipendenti. Se infatti fosse

$$ax + \sum_s b_s\,x_s + c\,\mathrm{X} = 0 \quad (\text{e analoghe in } y, \ldots)$$

moltiplicando per x, sommando con le analoghe, se ne deduce per (2) e (10) che $c = 0$; moltiplicando per x_t e sommando con le analoghe, si ha: $\sum_s b_s a_{st} = 0$ per ogni valore della t; e, poichè $\Delta \neq 0$, anche $b_s = 0$; donde segue $a = 0$.

Il complesso di coordinate

$$\xi = \mathrm{D}_2 x + x \, \mathrm{S} \, \mathrm{X} \, \mathrm{D}_2 x \quad \text{(e analoghe in } \eta, z, \pi, x, \varrho), \tag{12}$$

ove le du_i siano considerate come parametri legati dalla $\varphi = 0$ resta immutato; e per le sue coordinate vale semplicemente la $\bar{\xi} = \varrho \xi$. È per (2), (5), (10):

$$\mathrm{S} \xi x = \mathrm{S} \xi x_r = \mathrm{S} \xi \mathrm{X} = 0. \tag{13}$$

Ogni complesso ξ è in involuzione col sistema lineare ∞^{n+1} precedentemente considerato. Se $n = 2$, di tali complessi ξ ce ne sono perciò due che indicheremo con ξ e con ξ'; se $n = 3$ di tali complessi ξ ce n'è uno solo, come resterà confermato dai calcoli seguenti (mentre parrebbe che ce ne fossero ∞^1, dipendenti dai tre parametri du_s legati dalla $\varphi = 0$). Che per $n = 2$ ci siano due complessi ξ è evidente per il fatto che $\varphi = 0$ è un'equazione di secondo grado; siano infatti $\mathrm{R}_1 : \mathrm{R}_2$ ed $\mathrm{R}'_1 : \mathrm{R}'_2$ i due valori di $du : dv$, che annullano φ. Noi potremo ammettere che tanto le R_i quanto le R'_i si trasformino come le du_i, cioè che formino sistemi controvarianti. Le R, R' sono determinate a meno di un fattore; e noi, lasciando ancora una indeterminazione, osservando che $\sqrt{\Delta}(\mathrm{R}_1 \mathrm{R}'_2 - \mathrm{R}_2 \mathrm{R}'_1)$ resta invariato per cambiamenti di variabili coordinate u_j, imporremo che tale espressione valga $i = \sqrt{-1}$ [1]. Con questa convenzione segue subito che:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\Delta}(\mathrm{R}_1 \mathrm{R}'_2 - \mathrm{R}_2 \mathrm{R}'_1) = i \; ; \; \mathrm{R}_s \mathrm{R}'_s = \frac{1}{2} \mathrm{A}_{ss} \; ; \; \mathrm{R}_1 \mathrm{R}'_2 + \mathrm{R}_2 \mathrm{R}'_1 = \mathrm{A}_{12} \\ \Sigma a_{hk} \mathrm{R}_h \mathrm{R}'_k = 1 \; ; \; \mathrm{A}_{11} \mathrm{R}_2 \mathrm{R}'_2 - 2 \mathrm{A}_{12} (\mathrm{R}_1 \mathrm{R}'_2 + \mathrm{R}_2 \mathrm{R}'_1) + \mathrm{A}_{22} \mathrm{R}_1 \mathrm{R}'_1 = \dfrac{1}{\Delta} . \end{array} \right. \tag{14}$$

3. *Complessi di rette.* Le (13) determinano le ξ, ecc. a meno di un fattore comune. Per determinare queste coordinate in modo *intrinseco*, noi le potremo porre uguali rispettivamente ai complementi delle stesse ξ nel determinante $(x, x_1, x_2, x_3, \mathrm{X}, \xi)$ (di cui tra parentesi abbiamo scritto la prima riga, e le altre se ne deducono sostituendo alla x le $y, z, \ldots$) divisi per $\sqrt{\Delta}$. (Se $\Delta < 0$, e il complesso fosse reale, otterremmo enti reali dividendo per $\sqrt{-\Delta}$). Si noti che: *Le $\xi, \eta, \ldots$ così definite restano inva-*

[1] Tale espressione è immaginaria se $\Delta > 0$, perchè $\mathrm{R}_1 : \mathrm{R}_2$ ed $\mathrm{R}'_1 : \mathrm{R}'_2$ sono in tal caso complessi coniugati; non mi occupo qui di ridurmi ad enti reali; tanto più che, come vedremo, la parte essenziale di questo studio riguarda espressioni sempre *reali* per congruenze *reali*.

riate non solo cambiando le variabili u_s, ma anche moltiplicando le $x, y, \ldots$ per un qualsiasi fattore.

Per la regola del quadrato di una matrice è per (2), (4), (10)

$$(15)\qquad S\xi^2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & SX^2 \end{vmatrix} = -1,$$ che rende evidente la $\bar{\xi} = \xi$.

Nelle nostre ipotesi $\Delta \neq 0$ il nostro complesso ξ non è mai speciale. Ne vedremo ben presto il significato geometrico. I complessi di coordinate x, x_r, X, ξ sono linearmente indipendenti. Perchè se fosse $ax + bX + c\xi + \Sigma h_r x_r = 0$ e analoghe in $y, \ldots$, allora moltiplicando per ξ e sommando con le analoghe, si troverebbe per (13), (15) che $c = 0$; e quindi anche $a = b = h_r = 0$, perchè abbiamo già visto che le x, X, x_r formano sistemi indipendenti. Perciò **6** quantità qualunque, in particolare le x_{rs}, y_{rs}, ecc. si possono scrivere nella forma:

$$x_{rs} = \alpha_{rs} X + b_{rs} x + c_{rs}\xi + \sum_t l^t_{rs} x_t \quad \text{(e analoghe in } y, \ldots)$$

ove le α, b, l sono quantità da determinare. Moltiplicando per x, sommando con le analoghe, si trova per (1), (4), (10), (13) $\alpha_{rs} = a_{rs}$. Moltiplicando per x_h e sommando, si trova per (5) che $\sum_t l^t_{rs} a_{ht} = 0$, qualunque siano r, s, h. Poichè $\Delta \neq 0$, sarà $l^t_{rs} = 0$. Perciò

$$(16)\qquad x_{rs} = a_{rs} X + b_{rs} x + c_{rs}\xi \quad \text{ossia} \quad D_2 x = \varphi X + x\psi + \xi\chi, \text{ ove}$$

$$(16)_{bis}\qquad \chi = \Sigma\, c_{rs}\, du_r\, du_s = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}}(x, x_1, x_2, x_3, X, D_2 x);$$

$$\psi = \Sigma\, b_{rs}\, du_r\, du_s.$$

Queste sono *le formole fondamentali*, che p. es. dalle forme φ, ψ, χ permettono di risalire al complesso. Moltiplicando le $x, y, \ldots$ per uno stesso fattore ϱ, le (9), (11), (15), (16) provano che:

$$(17)\qquad \bar{\varphi} = \varrho^2\varphi\,;\ \bar{\chi} = \varrho\chi\,;\ \bar{\psi} = \varrho\psi + D_2\varrho - \frac{2}{\varrho}d\varrho^2 + \varphi\left(\frac{2}{3\varrho}\Delta_1\varrho - \frac{1}{3}\Delta_2\varrho\right).$$

Vedremo come si possa *togliere tale indeterminazione* alle φ, ψ, χ. La ψ, che ha il comportamento più complicato, è *la meno importante*, come vedremo. *Essa del resto si può rendere*, volendo, *proporzionale* a χ, scegliendo uguale ad 1 una delle coordinate di retta. (Se p. es. $x = 1$, è $x_{rs} = D_2 x = X = 0$; e per (16) la ψ vale $\lambda\chi$ ove $\lambda = -\xi$). Moltiplicando (16) per A_{rs} e sommando coi risultati ottenuti facendo variare gli indici r, s, si trova *che le forme* ψ, χ *sono coniugate alla reciproca della* φ, *cioè che*:

$$\Sigma A_{rs} b_{rs} = \Sigma A_{rs} c_{rs} = 0 . \tag{18}$$

Ma non pare opportuno rendere p. es. la $x = 1$, perchè tale uguaglianza non si conserva per trasformazioni proiettive. Consideriamo invece l'equazione di terzo grado in ω ottenuta uguagliando a zero il determinante $|\omega a_{rs} - c_{rs}|$, (discriminante di $\omega\varphi - \chi$). Se le tre radici di questa equazione sono nulle, allora, pensate le du_r come coordinate omogenee di punto in un piano σ, le $\varphi = 0$, $\psi = 0$ rappresentano due coniche C_φ, C_χ, di cui la seconda *coniugata* alla prima pensata come inviluppo. Perciò, *se le tre radici* ω_s *sono tutte e tre nulle, allora o la forma* χ *è identicamente nulla* (nel qual caso proveremo che il complesso *è lineare*), *oppure la* C_χ *si scompone in una retta tangente alla* C_φ, *e in un'altra retta passante per il punto di contatto*. Questo caso, che chiameremo il caso *anormale*, è da studiare a parte. Nel caso generale (caso *normale*), le radici ω_i si mutano in $\overline{\omega}_2 = \frac{\omega_r}{\varrho}$, se si moltiplicano le $x, y, \ldots$ per ϱ. Noi potremo determinare ϱ in modo *razionale ed intrinseco*, imponendo che una funzione simmetrica delle ω_r [p. es. quella che si presenta come denominatore nelle formole di risoluzione delle seguenti equazioni (19)] *valga l'unità. Le altre due funzioni simmetriche*, indipendenti dalla precedente, *sono due invarianti proiettivi del complesso*, che credo non osservati finora, e che potremo chiamare *le curvature proiettive* del complesso. Fissato ϱ, restano determinate in modo intrinseco le *coordinate*, che diremo *normali*, di una retta del complesso, *le quali per una collineazione subiscono soltanto una trasformazione ortogonale a coefficienti costanti a determinate unità*. Restano anche determinate le forme φ, ψ, χ, ciascuna delle quali definisce una *geometria metrica, completamente individuata dal complesso ed invariante per collineazioni* (finora era stata generalizzata la sola nozione di *angolo*: quello definito dalla metrica che ha φ per elemento lineare).

Escludiamo, oltre al caso *anormale*, quello in cui le coniche C_φ, C_χ *siano bitangenti*: casi molto semplici, ma che si debbono studiare a parte. Negli altri casi proveremo che le (16) equivalgono ad *un sistema di equazioni ai differenziali totali*. Infatti, indicati con (st, rp) i simboli a 4 indici di Riemann per φ, le condizioni di integrabilità di (16) sono per una formola di Ricci di calcolo assoluto

$$x_{rst} - x_{rts} = - \sum_{p,q} (st, rp) A_{pq} x_q$$

che diventano nel caso attuale:

$$(19)\quad a_{rs}\,X_t - a_{rt}\,X_s + c_{rs}\,\xi_t - c_{rt}\,\xi_s = \\ = (c_{rts} - c_{rst})\,\xi + (b_{rts} - b_{rst})\,x - b_{rs}\,x_t + b_{rt}\,x_s - \sum_{p,q}(st\,,rp)\,A_{pq}\,x_q$$

che, risolute rispetto alle ξ_s, ξ_t, X_s X_t, dànno queste *come combinazioni lineari delle* x, x_p, ξ (¹). *Le* (16), (19) *costituiscono perciò un sistema di equazioni ai differenziali totali, che permettono di determinare un complesso di date forme* φ, ψ, χ. *Le condizioni di integrabilità* (che non scrivo, anche per ragioni di spazio) *sono nella geometria proiettiva dei complessi l'analogo delle equazioni di Gauss e Codazzi nella geometria metrica delle superficie.* La

$$(16)_{bis}\qquad \chi = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\,(x\,,x_1\,,x_2\,,x_3\,,X\,,D_2 x)$$

dà, innalzando al quadrato, una semplice espressione per χ^2, che si può dedurre anche da (16), ricordando (15):

$$(20)\quad \chi^2 = -S(D_2 x - \varphi X - x\psi)^2 = \\ = -S(D_2 x - \varphi X)^2 = -S(D_2 x)^2 + 2\varphi\, SX\, D_2 x - \varphi^2\, SX^2$$

perchè $0 = Sx^2 = Sx(D_2 x - \varphi X)$.

Si noti, per il confronto con la teoria delle congruenze che, posto

$$(21)\quad \begin{cases} h_{rspq} = -S x_{rs}\, x_{pq}\,, \text{ si ha: } -S(D_2 x)^2 = \Sigma\, h_{rspq}\, du_r\, du_s\, du_p\, du_q \\ -\Sigma X^2 = 1/9\, \Sigma\, h_{rspq}\, A_{rs}\, A_{pq}\ ;\ SX\, D_2 x = -1/3\, \Sigma\, A_{rs}\, h_{rspq}\, du_p\, du_q\,. \end{cases}$$

4. *Interpretazione geometrica. Deformazione proiettiva di un complesso.* Sia $ax + by + cz + lp + mq + sr = 0$ ($a, b, c, l, m, s = \text{cost.}$) un complesso Γ lineare tangente al complesso dato C lungo una certa retta r. Ivi sarà non solo $S\alpha x = 0$ (che è soltanto un modo conciso di scrivere la equazione del complesso Γ), ma anche $S\alpha\, x_r = 0$. Il complesso Γ taglia il complesso dato C in altre rette infinitamente vicine alla r, determinate

(¹) Per riconoscere che le (19) sono risolubili *nella retta generica* $u_i = u_i^0$ si può p. es. ridurre per $u_i = u_i^0$ le φ, χ ad una qualche forma canonica. Se le coniche C_φ, C_χ hanno un solo punto comune, p. es. il punto $du_1 = du_2 = 0$, ridotta la φ alla forma $du_2^2 + 2\,du_1\,du_3$, la χ sarebbe del tipo $\beta(du_2^2 + 2\,du_1\,du_3) + \alpha\,du_1^2$; ove, per (18), $\beta = 0$; e saremmo nel caso *anormale*. Se le due coniche hanno comune anche il punto $du_2 = du_3 = 0$, la χ sarà del tipo $\alpha\,du_2^2 + 2\beta\,du_1\,du_2 + 2\gamma\,du_1\,du_3 + 2\lambda\,du_2\,du_3$. Se il punto $du_1 = du_2 = 0$ è punto di contatto, la retta $\frac{1}{du_2}(\chi - \gamma\varphi) = 0$, cioè $(\alpha - \gamma)\,du_2 + 2\beta\,du_1 + 2\lambda\,du_3 = 0$ dovrà passare per esso; e quindi $\lambda = 0$. Poichè per (18) $\alpha + 2\gamma = 0$ (mentre nè siamo nel caso anormale, nè le due coniche sono bitangenti) è $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Si riconosce facilmente che in tal caso le (19) sono risolubili; ciò che avviene anche se C_φ, C_χ hanno quattro intersezioni distinte; come si vede, osservando che in tal caso si può supporre (per $u_i = u_i^0$) $\varphi = du_1^2 + du_2^2 + du_3^2$; $\psi = \alpha\,du_1^2 + \beta\,du_2^2 + \gamma\,du_3^2$ con $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta$.

dalla $S\Sigma \alpha x_{rs} du_r du_s = 0$, cioè $\varphi S \alpha X + \chi S \alpha \xi = 0$. Pensate le u come coordinate di punto in uno spazio σ a tre dimensioni, questa equazione determina un fascio di coni quadrici col vertice nel punto immagine di r. Ognuno di questi coni corrisponde a un complesso lineare Γ tangente a C in r, e viceversa. *Il complesso ξ è geometricamente il complesso cui corrisponde un cono quadrico $\chi = 0$ apolare o coniugato al cono $\varphi = 0$, pensato come inviluppo. Il sistema lineare di complessi definito dai complessi x, x_r, X è il sistema dei complessi in involuzione col complesso ξ.*

Vogliamo ora occuparci dell'applicabilità proiettiva di due complessi, che noi definiremo in modo analogo a quello usato per le superficie e ipersuperficie nella mia Memoria citata al § 1 di questa Nota.

Se abbiamo un altro complesso C^0, luogo della retta $x^0, y^0, \dots$, funzioni degli stessi parametri u_r, cioè in corrispondenza biunivoca con C, i due complessi saranno in una coppia di rette omologhe r, r^0 proiettivamente applicabili se potremo trasformare con opportuna collineazione uno di essi in guisa che lungo le r, r^0 valgano le

$$(22) \qquad x = \varrho x^0 \; ; \; x_s = \varrho(x^0_s + m_s x^0) \; ;$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} = \varrho \left(\frac{\partial^2 x^0}{\partial u_i \partial u_j} + \mu_i \frac{\partial x^0}{\partial u_j} + \mu_j \frac{\partial x^0}{\partial u_i} + h_{ij} x^0 \right)$$

con opportuni valori delle ϱ, m, μ, h. Se ne deduce tosto che lungo le rette r, r^0 *le forme φ, φ^0 dei due complessi sono proporzionali*. Supposto che *questa condizione sia soddisfatta per tutti i valori u* (cosicchè, *moltiplicando le x^0 per un conveniente fattore, si possa supporre identicamente $\varphi = \varphi^0$*), *condizione necessaria e sufficiente affinchè* C, C^0 *siano proiettivamente applicabili in due rette omologhe r, r^0 è che le due forme χ, χ^0 siano ivi uguali.*

Infatti, essendo $\varphi = \varphi^0$ identicamente, le (22) diventano in coordinate covarianti

$$(22)_{bis} \quad x = x^0 \;,\; x_s = x^0_s + m_s x_0 \;;\; x_{ij} = x^0_{ij} + \mu_i x^0_j + \mu_j x^0_i + h_{ij} x \,.$$

Basta ricordare il valore $(16)_{bis}$ di χ per riconoscere che $\chi = \chi^0$.

Viceversa, se identicamente $\varphi = \varphi^0$, e se nelle rette r, r^0 è $\chi = \chi^0$, noi potremo trasformare C^0 con una tale collineazione che per la retta considerata sia $x = x^0$, $x_r = x^0_r$, $\xi = \xi^0$, perchè le espressioni Sx^3, $Sx_r x_s$, $S\xi^2$, $S\xi x$, $S\xi x_r$, $Sx\xi$ hanno valori uguali per i due complessi; il complesso X^0 apparterrà al fascio dei due complessi X, x. Scrivendo le (16) per i due complessi, si riconosce che nelle rette r, r^0 valgono le $(22)_{bis}$ con $\varrho = 1$, $m_r = \mu_r = 0$. c. d. d.

Le forme φ, χ costituiscono insieme l'*elemento lineare proiettivo* del complesso, il problema della deformazione proiettiva di un complesso, cioè di determinare le forme ψ compatibili con le φ, χ si riduce allo studio delle condizioni di integrabilità delle (16), (19).

Studieremo dapprima il caso che χ sia identicamente nullo.