ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

Idromeccanica. — *Equazione caratteristica dei piccoli moti ondosi in un canale di qualunque profondità.* Nota II [1] di UMBERTO CISOTTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

3. *Canali poco profondi* (*Lagrange*). — Si supponga così piccola la profondità h del canale, da potersi trattare come infinitesimo di primo ordine. Si ha allora, applicando alla $f(t\,;z)$ lo sviluppo tayloriano, rispetto all'argomento z:

$$f(t\,;z+ih)=f(t\,;z)+ih\frac{\partial}{\partial z}f(t\,;z)\,,$$

$$f(t\,;z-ih)=f(t\,;z)-ih\frac{\partial}{\partial z}f(t\,;z)\,;$$

per cui, colla voluta approssimazione l'equazione caratteristica (9) diviene, scrivendo brevemente f in luogo di $f(t\,;z)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-gh\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0\,.$$

Posto

$$c^2=gh\,,$$

e indicando f_1 e f_2 due funzioni arbitrarie, la soluzione completa della precedente è:

$$f=f_1(z+ct)+f_2(z-ct)\,, \tag{10}$$

ed f sarà reale sull'asse reale se reali sono f_1 e f_2 per valori reali dei rispettivi argomenti.

Sopra il pelo imperturbato $y=h$ si ha allora colla solita approssimazione:

$$f(t;x+ih)=f_1(x+ct)+f_2(x-ct)+ih\,\{f'_1(x+ct)+f'_2(x-ct)\}\,,$$

designando gli apici derivazione rapporto agli argomenti rispettivamente indicati; in particolare per la parte reale si ricava

$$\varphi=f_1(x+ct)+f_2(x-ct)\,,\quad \text{per } y=h\,.$$

Poichè la (6) porge

$$\eta=-\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,,\quad \text{per } y=h\,.$$

[1] Vedi la Nota I in questi Rendiconti, pag. 256.

così per la precedente si ottiene

$$\eta = -\frac{c}{g}\left\{ f_1'(x+ct) - f_2'(x-ct) \right\}, \quad \text{per } y = h. \tag{11}$$

Questa relazione definisce il sopraelevamento del pelo libero l, e quindi la forma di l in ogni istante quando sieno assegnate le funzioni f_1 e f_2. L'assegnazione di queste funzioni dipende dalle circostanze iniziali. Per es., se si ammette che la provocazione iniziale abbia carattere impulsivo, allora per $t = 0$ dev'essere $\varphi = 0$ in S e quindi $f = 0$; dalla (10) scende allora la seguente condizione:

$$f_1 + f_2 = 0.$$

Per questa la (11) diviene

$$\eta = -\frac{c}{g}\left\{ f_1'(x-ct) + f_1'(x+ct) \right\}.$$

È facile ora di rilevare il significato della funzione f_1'. Ponendo nella precedente $t = 0$ e chiamando η_0 il sovraelevamento iniziale si ottiene

$$\eta_0 = -\frac{2c}{g} f_1'(x),$$

per cui la precedente può scriversi:

$$2\eta = \eta_0(x-ct) + \eta_0(x+ct),$$

che definisce ad ogni istante la forma di l nota la sua forma iniziale.

Come si vede, si tratta di onde che si propagano colla medesima legge che regola la propagazione del suono. qualunque sia la perturbazione iniziale: la velocità di propagazione è $c = \sqrt{gh}$. Ciò era già stato messo in rilievo da Lagrange [1].

4. *Canali infinitamente profondi* (*Poisson-Cauchy*). — Immaginiamo di trasportare gli assi Oxy parallelamente a se stessi coll'origine nel punto $x = 0$, $y = h$: ciò equivale a cambiare z in $z + ih$. L'equazione caratteristica (9) diviene con tale referenza:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{ f(t\,;z+2ih) + f(t\,;z) \right\} + ig\frac{\partial}{\partial z}\left\{ f(t\,;z+2ih) - f(t\,;z) \right\} = 0.$$

Ciò premesso, supporremo che tanto f quanto la sua derivata rispetto a z (che, come è noto, definisce la velocità) si annullino all'∞; allora facendo crescere h indefinitamente, il primo e il terzo termine della equazione che precede hanno per limite zero e l'equazione diviene:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t\,;z) - ig\frac{\partial}{\partial z} f(t\,;z) = 0,$$

[1] Lagrange, loc. cit.; oppure Lamb, loc. cit., pag. 248.

che, come per primo fece rilevare Levi-Civita [1], è l'equazione caratteristica delle onde di Poisson-Cauchy.

5. *Canali molto profondi* (*Palatini*). — Il caso di un canale considerevolmente profondo, senza esserlo infinitamente, è stato studiato da Palatini [2]. L'ipotesi specifica viene tradotta analiticamente nella circostanza che si può ritenere

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^2 \, \partial y} + g \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \,, \quad \text{per } y = h \ [3]. \tag{12}$$

Questa condizione al contorno può facilmente trasformarsi in una equazione indefinita. Si noti infatti che, essendo per la (3) e per la prima delle (1)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \,, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \,,$$

la precedente può scriversi:

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial t^2 \, \partial x} + g \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \,, \quad \text{per } y = h \,,$$

e, per le (8),

$$\frac{\partial^3}{\partial t^2 \, \partial x} \left\{ f(t\,; x + ih) - f(t\,; x - ih) \right\} + \\ + ig \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ f(t\,; x + ih) + f(t\,; x - ih) \right\} = 0 \,,$$

la quale — trattandosi di funzione analitica — vale anche quando a x si sostituisca z, essendo z l'affissa di un punto generico del campo di esistenza. Pertanto la condizione (12) relativa alla retta $y = h$ è sostituibile colla seguente:

$$\frac{\partial^3}{\partial t^2 \, \partial z} \left\{ f(t\,; z + ih) - f(t\,; z - ih) \right\} + \\ + ig \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ f(t\,; z + ih) + f(t\,; z - ih) \right\} = 0 \,,$$

entro S.

Ciò premesso, derivando due volte rispetto a t l'equazione caratteristica (9), si ottiene

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4} \left\{ f(t\,; z + ih) + f(t\,; z - ih) \right\} + \\ + ig \frac{\partial^3}{\partial t^2 \, \partial z} \left\{ f(t\,; z + ih) - f(t\,; z - ih) \right\} = 0 \,.$$

[1] Cfr. Tonolo, *Nuova risoluzione del problema delle onde di Poisson-Cauchy* [Atti del R. Ist. Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, tomo LXXIII (1913), pag. 545 sgg.].

[2] Palatini, loc. cit.

[3] Palatini, loc. cit., 1° § 1, n. 3, ipotesi *c*).

Eliminando in questa i due ultimi termini, per mezzo della precedente, si ricava

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4}\left\{ f(t\,;z+ih)+f(t\,;z-ih)\right\} +$$
$$+ g^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left\{ f(t\,;z+ih)+f(t\,;z-ih)\right\} = 0\,.$$

Immagino ora di riferirmi, come nel numero precedente, a una coppia di assi paralleli ai prefissati e con l'origine nel punto $x=0\,,y=h$; la equazione corrispondente si ottiene dalla precedente cambiando z in $z+ih$:

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4}\left\{ f(t\,;z+2ih)+f(t\,;z)\right\} + g^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left\{ f(t\,;z+2ih)+f(t\,;z)\right\} = 0\,.$$

Se si ammette che per h molto grande si annulli f e le sue due prime derivate rispetto a z, per qualunque t, il primo e il terzo termine della precedente relazione tendono a zero e si ottiene

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4} f(t\,;z) + g^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(t\,;z) = 0,$$

che è l'equazione stabilita dal Palatini per i moti ondosi in discorso ([1]).

6. *Onde progressive di tipo permanente.* — Immagino ora che il moto ondoso abbia carattere permanente rispetto ad una coppia di assi dotata di traslazione uniforme di velocità c nel senso delle x negative; la f dipende allora da t pel tramite dell'argomento

$$\zeta = z - ct\,.$$

Con ciò l'equazione caratteristica (9) si trasforma nella seguente:

$$\frac{\partial^2}{d\zeta^2}\left\{ f(\zeta+ih)+f(\zeta-ih)\right\} + i\,\frac{g}{c^2}\,\frac{d}{d\zeta}\left\{ f(\zeta+ih)-f(\zeta-ih)\right\} = 0\,.$$

Pongo

$$w = \frac{df}{d\zeta}\,, \tag{13}$$

con che, come è noto, la parte reale di w e il coefficiente di $-i$ sono le componenti della velocità rispetto agli assi mobili; la precedente può allora scriversi:

$$\frac{d}{d\zeta}\left\{ w(\zeta+ih)+w(\zeta-ih)\right\} + \frac{ig}{c^2}\left\{ w(\zeta+ih)-w(\zeta-ih)\right\} = 0\,.$$

([1]) Palatini, loc. cit., 1°, § 4.

Si noti che si tratta di piccoli moti (assoluti) ondosi per cui posto

$$w = c(1+\varepsilon)\,, \tag{14}$$

ε è quantità di primo ordine; la precedente equazione si trasforma allora nella seguente relativa alla funzione ε:

$$\frac{d}{d\zeta}\left\{\varepsilon(\zeta+ih)+\varepsilon(\zeta-ih)\right\}+\frac{ig}{c^2}\left\{\varepsilon(\zeta+ih)-\varepsilon(\zeta-ih)\right\}=0\,,$$

che è equazione caratteristica dei moti ondosi in discorso.

È facile di constatare la sua equivalenza con quella stabilita da Levi-Civita [1]. Basta riferirsi, come fa il Levi-Civita, alla striscia

$$-q \leq \psi \leq q \quad , \quad -\infty \leq \varphi \leq \infty$$

del piano f, che è rappresentazione conforme della striscia $S+S'$ del piano ζ. Infatti avendosi allora dalle (13) e (14), colla cennata approssimazione

$$\frac{d\varepsilon}{d\zeta}=c\,\frac{d\varepsilon}{df}\,,$$

la precedente equazione caratteristica diviene

$$\frac{d}{df}\left\{\varepsilon(f+iq)+\varepsilon(f-iq)\right\}+\frac{ig}{c^3}\left\{\varepsilon(f+iq)-\varepsilon(f-iq)\right\}=0\,,$$

che è appunto l'equazione di Levi-Civita.

Matematica. — *Sulle equazioni integrali.* Nota V di PIA NALLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

18. Passiamo ora alla ricerca delle costanti caratteristiche μ per ognuna delle quali esiste un numero positivo δ tale che sia quasi dapertutto

$$k^2(s)-\delta>\mu^2\,, \tag{34}$$

e delle corrispondenti funzioni caratteristiche.

Perchè la (34) possa essere soddisfatta occorre che $|k(s)|$ si mantenga quasi dapertutto superiore ad una quantità positiva fissa. Supporremo questa condizione soddisfatta.

Supponiamo prima che zero sia una costante caratteristica propria relativa a $K(s,t)$ e $k(s)$ e sia $\Gamma(s,t)$ la corrispondente funzione fondamentale: si potrà porre

$$\Gamma(s,t)=-\sum_{i=1}^{m}k(t)\,\varphi_i(s)\,\varphi_i(t)\,,$$

[1] Levi-Civita, loc. cit., pag. 787, formola (13).

le $\varphi_i(s)$ formando un sistema ortogonale come le $k(s)\,\varphi_i(s)$, moltiplicate per opportune costanti [1].

La più generale funzione $\varphi(s)$ soddisfacente all'eguaglianza

$$k(s)\,\varphi(s) + \int_a^b \mathrm{K}(s\,,t)\,\varphi(t)\,dt = 0$$

è una combinazione lineare delle $\varphi_i(s)$: queste costituiscono dunque un sistema completo di soluzioni dell'equazione omogenea di Fredholm

$$\varphi(s) + \int_a^b \frac{\mathrm{K}(s\,,t)}{k(s)}\,\varphi(t)\,dt = 0\,.$$

È allora noto che, perchè si possa risolvere l'equazione

$$f(s) = \psi(s) + \int_a^b \frac{\mathrm{K}(s\,,t)}{k(s)}\,\psi(t)\,dt \tag{35}$$

nella funzione incognita $\psi(s)$ [$f(s)$ essendo una funzione sommabile in $(a\,,b)$ insieme col suo quadrato] è necessario e sufficiente che $f(s)$ soddisfi alle seguenti condizioni: $\int_a^b f(s)\,\chi_i(s)\,ds = 0$ $(i = 1\,,2\,,\ldots m)$, dove le $\chi_i(s)$ costituiscono un sistema completo di soluzioni dell'equazione omogenea

$$\chi(s) + \int_a^b \frac{\mathrm{K}(s\,,t)}{k(t)}\,\chi(t)\,dt = 0\,. \tag{36}$$

Ma questa è soddisfatta prendendo $\chi(t) = k(s)\,\varphi_i(s)$, e siccome le $k(s)\,\varphi_i(s)$ sono linearmente indipendenti, costituiscono un sistema completo di soluzioni della (36), quindi perchè la (35) ammetta soluzione è necessario e sufficiente che $f(s)$ soddisfi alle seguenti condizioni:

$$\int_a^b f(s)\,k(s)\,\varphi_i(s)\,ds = 0 \qquad (i = 1\,,2\,,\ldots m)\,.$$

Data dunque una funzione reale $f_0(s)$, sommabile in $(a\,,b)$ insieme col suo quadrato, potremo determinarne un'altra $f_{-1}(s)$ soddisfacente all'eguaglianza

$$f_0(s) = k(s)\,f_{-1}(s) + \int_a^b \mathrm{K}(s\,,t)\,f_{-1}(t)\,dt \tag{37}$$

quando e solamente quando $f_0(s)$ soddisfa alle condizioni $\int_a^b f_0(s)\,\varphi_i(s)\,ds = 0$, cioè alla condizione: $\int_a^b \Gamma(t\,,s)\,f_0(t)\,dt = 0\,.$

[1] Le $\varphi_i(s)$ sono in numero finito, perchè $|k(s)|$ si mantiene superiore ad una quantità positiva fissa.

Supposta soddisfatta questa condizione la (37) ammette infinite soluzioni che differiscono per una combinazione lineare delle $\varphi_i(s)$: noi fisseremo quella soluzione soddisfacente alla condizione $\int_a^b \Gamma(t\,,s)\,f_{-1}(t)\,dt = 0$ e chiameremo $f_{-1}(s)$ *prima iterata inversa di* $f_0(s)$ *relativamente a* $K(s\,,t)$ *e* $k(s)$.

Potremo dunque formare la successione di funzioni

$$f_0(s)\,,\,f_{-1}(s)\,,\,f_{-2}(s)\,,\ldots f_{-n}(s)\,,\ldots \tag{38}$$

ciascuna delle quali è la prima iterata inversa della precedente: chiameremo $f_{-n}(s)$ n^{esima} *iterata inversa di* $f_0(s)$ *relativa a* $K(s\,,t)$ *e* $k(s)$.

Le iterate di $f_0(s)$ definite al n. 2 della Nota I le chiameremo più propriamente *iterate dirette*.

Supponiamo ora che zero non sia una costante caratteristica propria relativa a $K(s\,,t)$ e $k(s)$: allora la (37) ammette una ed una sola soluzione $f_{-1}(s)$, qualunque sia $f_0(s)$ sommabile in $(a\,,b)$ insieme col suo quadrato, e potremo ancora definire la successione (38) delle iterate inverse.

Le iterate inverse di $f_0(s)$ sono dunque definite in ogni caso dalle relazioni di ricorrenza

$$f_{-(n-1)}(s) = k(s)\,f_{-n}(s) + \int_a^b K(s\,,t)\,f_{-n}(t)\,dt \qquad (n = 1\,,2\,,\ldots)$$

alle quali, nel caso in cui zero sia una costante caratteristica propria, bisogna aggiungere $\int_a^b \Gamma(t\,,s)\,f_{-n}(t)\,dt = 0$ per qualunque $n \geq 0$.

Se $g_0(s)$ è un'altra funzione sommabile in $(a\,.\,b)$ insieme col suo quadrato, $m\,,n\,,r$ tre interi non negativi ed $r \leq n$, si avrà

$$\int_a^b g_{-m}(s)\,f_{-n}(s)\,ds = \int_a^b g_{-(m+r)}(s)\,f_{-(n-r)}(s)\,ds\,. \tag{39}$$

19. Premesse queste definizioni, siano $\mu_1\,,\mu_2\,,\ldots$ costanti caratteristiche proprie e distinte relative a $K(s\,,t)$ e $k(s)$ e $\Gamma_1(s\,,t)\,,\,\Gamma_2(s\,,t)\,,\ldots$ le corrispondenti funzioni caratteristiche.

Se tra le costanti caratteristiche proprie c'è lo zero, lo supporremo incluso tra le μ_n: potrebbe anche la successione delle μ_n non contenere nessun termine oltre questo eventuale termine nullo.

Definite le funzioni $C_r(s\,,t)$ come al n. 12, poniamo

$$B_1(s\,,t) = K(s\,,t) - C_1(s\,,t)\ \text{(1)}\,.$$

(1) La $B_1(s\,,t)$ è la stessa funzione $D_1(s\,,t)$ della Nota III.

Essendo, per qualunque n,

$$\int_a^b \Gamma_n(v\,,s)\,B_1(v\,,t)\,dv = 0\,, \tag{40}$$

possiamo formare le iterate inverse di $B_1(s\,,t)$, considerata come funzione di s, relativamente a $K(s\,,t)$ e $k(s)$.

Denotiamo con $B_n(s\,,t)$ la iterata inversa di ordine $n-1$; sarà

$$B_{n-1}(s\,,t) = k(s)\,B_n(s\,,t) + \int_a^b K(v\,,s)\,B_n(v\,,t)\,dv\,.$$

Per la (40) si può anche scrivere

$$B_{n-1}(s\,,t) = k(s)\,B_n(s\,,t) + \int_a^b B_1(v\,,s)\,B_n(v\,,t)\,dv\,,$$

e da questa, per la (39), si ottiene

$$B_{\mu+\nu-1}(s\,,t) = k(s)\,B_{\mu+\nu}(s\,,t) + \int_a^b B_\mu(v\,,s)\,B_{\nu+1}(v\,,t)\,dv\,,$$

se μ e ν sono due interi, positivo il primo, non negativo il secondo.

Se $B_n(s\,,t)=0$ è anche $B_{n-1}(s\,,t)=0$, quindi $B_1(s\,,t)=0$: questo caso è stato già esaminato al n. 12.

In particolare, se la successione delle μ_n non contiene nessun termine si ha $B_1(s\,,t)=K(s\,,t)$, quindi nessuna delle $B_n(s\,,t)$ è nulla.

Supposto $B_1(s\,,t) \neq 0$, poniamo

$$X_n = \int_a^b \int_a^b B_n^2(s\,,t)\,ds\,dt:$$

sarà, per la (39),

$$\int_a^b B_n^2(s\,,t)\,ds = \int_a^b B_{n-1}(s\,,t)\,B_{n+1}(s\,,t)\,ds\,,$$

e perciò

$$X_n^2 \leq X_{n-1}\,X_{n+1}\,.$$

Ponendo $h_n = \dfrac{X_n}{X_{n-1}}$, la successione delle h_n, crescente e limitata, tende ad un limite $h > 0$.

Si dimostra che *se μ è una costante caratteristica propria diversa dalle μ_n si ha $\mu^2 \geq \dfrac{1}{h}$.*

Ricordiamo che si era trovato $\mu^2 \leq d$.

In particolare, se la successione delle μ_n non contiene nessun termine, tranne eventualmente lo zero, si ha $d = c^{(1)}$ ed h ha un certo valore che chiamiamo $h^{(1)}$. *Per qualunque costante caratteristica propria* μ *diversa da zero si ha* $\mu^2 \leq c^{(1)}$ *e* $\mu^2 \geq \frac{1}{h^{(1)}}$.

La successione decrescente $\frac{X_n}{h^n}$ tende ad un limite $X \geq 0$, e la successione delle funzioni $A_n(s, t) = \frac{B_{2n}(s, t)}{h^n}$ converge in media verso una funzione $B(s, t)$ per la quale si ha: $\int_a^b \int_a^b B^2(s, t)\, ds\, dt = X$. Questa funzione non è identicamente nulla quando e solo quando è $X > 0$.

Supposto $X > 0$, dalla relazione

$$\frac{1}{h} A_{n-1}(s, t) = k^2(s)\, A_n(s, t) + \int_a^b K^{(2)}(v, s)\, A_n(v, t)\, dv,$$

per la convergenza in media di $A_n(s, t)$ verso $B(s, t)$, si conclude

$$\frac{1}{h} B(s, t) = k^2(s)\, B(s, t) + \int_a^b K^{(2)}(v, s)\, B(v, t)\, dv$$

quindi $B(s, t)$, considerata come funzione di s, è fondamentale relativamente a $K^3(s, t)$ e $k^2(s)$ e corrisponde alla costante $\frac{1}{h}$.

Ed allora, al solito, si possono dare due casi: 1°) $B(s, t)$, considerata come funzione di s, è fondamentale relativamente a $K(s, t)$ e $k(s)$, ad allora soddisfa alla seguente equazione

$$\frac{1}{\sqrt{h}} B(s, t) = k(s)\, B(s, t) + \sqrt{h} \int_a^b B(v, s)\, B(v, t)\, dv,$$

e per qualunque funzione fondamentale $\varphi(s)$ corrispondente alla costante $\frac{1}{\sqrt{h}}$ si ha

$$\left(\frac{1}{\sqrt{h}} - k(s)\right) \varphi(s) = \sqrt{h} \int_a^b B(t, s)\, \varphi(t)\, dt,$$

cioè $\sqrt{h}\, B(s, t)$ è la funzione caratteristica corrispondente a $\frac{1}{\sqrt{h}}$, e questa è una costante caratteristica propria.

2°) $B(s, t)$ non è funzione fondamentale relativamente a $K(s, t)$ e $k(s)$, ed allora lo sono le due funzioni $N_1(s, t)$, $N_2(s, t)$, considerate come funzioni di s, definite dalle relazioni

$$N_i(s, t) = \frac{1}{2} B(s, t) + \frac{(-1)^{i-1} \sqrt{h}}{2} \left[k(s)\, B(s, t) + \int_a^b K(v, s)\, B(v, t)\, dv \right]$$
$$(i = 1, 2),$$

e $(-1)^{i-1}\sqrt{h}\,N_i(s, t)$ è la funzione caratteristica corrispondente alla costante propria $\dfrac{(-1)^{i-1}}{\sqrt{h}}$.

Si ha per qualunque n e qualunque sia $X \geq 0$:

$$\int_a^b \Gamma_n(v\,,s)\,B(v\,,t)\,dv = 0\,,$$

quindi, in ogni caso, $\dfrac{1}{h} \neq \mu_n^2$, qualunque sia n.

20. Si può dimostrare il seguente teorema: *se esiste un numero* $\varepsilon > 0$ *tale che sia quasi dapertutto* $k^2(s) - \varepsilon > \dfrac{1}{h}$ *si ha* $X > 0$, quindi *condizione necessaria e sufficiente perchè esista una costante caratteristica propria* μ, *diversa dalle* μ_n, *soddisfacente alla* (34), *è che si possa trovare un numero* $\varepsilon > 0$ *tale che sia quasi dapertutto* $k^2(s) - \varepsilon > \dfrac{1}{h}$.

Ed allora si possono determinare tutte le costanti caratteristiche soddisfacenti alla (34), e le corrispondenti funzioni caratteristiche. Basta formare dapprima la successione delle μ_n col solo termine $\mu_1 = 0$, se questa è una costante caratteristica propria o con nessun termine nel caso contrario: si viene a determinare un h che chiamiamo h_1, ed esistono costanti caratteristiche soddisfacenti alla (34) quando e solo quando questa è soddisfatta per $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{h_1}}$, ed $\dfrac{1}{|\sqrt{h_1}|}$ è il minimo valore assoluto delle costanti soddisfacenti alla (34).

Col metodo esposto al num. precedente si determina la funzione caratteristica corrispondente alla costante $\pm\dfrac{1}{\sqrt{h_1}}$.

Formando ora la successione delle μ_n con l'eventuale termine $\mu_1 = 0$ e con uno o due termini (secondo i casi) aventi per valore assoluto $\dfrac{1}{|\sqrt{h_1}|}$, si determinano le costanti caratteristiche soddisfacenti alla (34) che hanno minimo valore assoluto maggiore di $\dfrac{1}{|\sqrt{h_1}|}$ e le corrispondenti funzioni caratteristiche, e così via: si vengono a trovare tutte le costanti caratteristiche soddisfacenti alla (34), ordinate per modulo crescente, e le corrispondenti funzioni caratteristiche.

Se le costanti sono infinite, i loro valori assoluti hanno per punto limite il punto l' tale che l'insieme dei punti nei quali è $|k(s)| < l'$ è di misura nulla, mentre, qualunque sia $\varepsilon > 0$, l'insieme dei punti nei quali è $|k(s)| < l' + \varepsilon$ ha misura non nulla. Inoltre, se μ è una costante caratteristica soddisfacente alla (34), $|k(s) - \mu|$ si mantiene quasi dapertutto superiore ad una quantità positiva fissa; e se $\Gamma(s, t)$ è la funzione caratteristica corrispondente a tale costante si ha $\Gamma(s, t) = (\mu - k(t)) \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(s) \varphi_i(t)$.

La più generale funzione fondamentale corrispondente a μ è una combinazione lineare delle $\varphi_i(s)$.

Fisica. — *Sulla costante capillare del mercurio puro e delle amalgame liquide di potassio in contatto con soluzioni di ioduro di potassio* (1). Nota del prof. V. Polara, presentata dal Socio A. Riccò.

Le ricerche del Gouy (2) provano che la costante capillare del mercurio in contatto con soluzioni in acqua di KJ assume un valor massimo alquanto inferiore a quello che la costante capillare di tale metallo acquista al contatto con soluzioni $^1/_6$ in volume di H^2So^4: si ha così un caso notevole di deviazione dalla legge formulata dal Lippmann (3), secondo la quale la costante capillare dovrebbe essere funzione *unicamente* della differenza di potenziale al contatto e quindi il suo massimo indipendente dalla natura dei corpi in contatto.

Mi son proposto prima di tutto di ricercare l'eventuale influenza della concentrazione della soluzione di KJ sul valor massimo della costante capillare del mercurio al suo contatto e sulla polarizzazione occorrente per determinare tale massimo.

Mi son servito dell'apparecchio di Quincke (4), composto di due tubi comunicanti, uno largo e l'altro capillare della sezione di mm. 0,74, contenenti mercurio puro, distillato nel vuoto. Il tubo capillare conteneva, al di sopra del mercurio, la soluzione di KJ che volevo studiare, e la sua estremità codata pescava in un bicchiere contenente mercurio nella parte inferiore, e la medesima soluzione di KJ nella parte superiore. Due elettrodi di platino pescavano uno nel mercurio del tubo largo e l'altro nel mercurio del bicchiere, ed erano collegati rispettivamente il primo ad un estremo del filo di un compensatore di Du Boys Reymond — e precisamente all'estremo che era connesso con il polo negativo dell'elemento Daniel che alimentava il circuito —, e l'altro con il cursore mobile sul filo, spo-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Catania.
(2) Gouy, Comptes Rendus, 1892, tome 114, pag. 211.
(3) Chwolson, *Traité de Physique*, tomo CXIV, 1° fascicolo, pag. 231.
(4) Ibidem, tomo IV, 1° fascicolo, pag. 226.