ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

esagoni è, secondo i detti autori, più piccolo di quello delle molecole, pure esagonali, del benzolo, e di conseguenza si comprenderebbe come gli atomi di carbonio siano nella grafite più strettamente legati che nel benzolo (21,0 calorie in luogo di 16,6); così si intravede anche la possibilità di trovare una relazione fra il valore dell'affinità e la distanza degli atomi nei composti.

Meccanica. — *Sul problema delle coazioni elastiche.* Nota II di Gustavo Colonnetti, presentata dal Socio V. Volterra.

Volendo ulteriormente approfondire l'analisi della distorsione a cui nella Nota precedente abbiamo ricondotto il problema generale delle coazioni elastiche, introduciamo nelle nostre considerazioni le sei componenti di deformazione

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}$$

nonchè le sei componenti speciali di tensione

$$\sigma_x \,,\ \sigma_y \,,\ \sigma_z \,,\ \tau_{yz} \,,\ \tau_{zx} \,,\ \tau_{xy}$$

alle quali le prime sono legate dalle relazioni

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_z}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{yz}} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{zx}} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{xy}}$$

essendo

$$\varphi(\sigma_x \,,\ \sigma_y \,,\ \sigma_z \,,\ \tau_{yz} \,,\ \tau_{zx} \,,\ \tau_{xy})$$

l'energia potenziale elastica elementare.

E proponiamoci di determinare quale variazione subirebbe l'energia potenziale elastica totale

$$\Phi = \int_V \varphi(\sigma_x \,,\ \sigma_y \,,\ \sigma_z \,,\ \tau_{yz} \,,\ \tau_{zx} \,,\ \tau_{xy})\, dV$$

qualora si attribuissero idealmente alle P_x, P_y, P_z e conseguentemente alle σ_x, σ_y, σ_z, τ_{yz}, τ_{zx}, τ_{xy}, delle variazioni compatibili colle leggi dell'equilibrio; tali cioè che per esse il primitivo sistema di forze, per ipotesi equilibrato, si trasformi in un altro sistema, pure equilibrato.

Per il che occorre e basta che si abbia identicamente

$$(a)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial(\delta\sigma_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\delta\tau_{xy})}{\partial y}+\frac{\partial(\delta\tau_{zx})}{\partial z}=0\\ &\frac{\partial(\delta\tau_{xy})}{\partial x}+\frac{\partial(\delta\sigma_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial z}=0\\ &\frac{\partial(\delta\tau_{zx})}{\partial x}+\frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial y}+\frac{\partial(\delta\sigma_z)}{\partial z}=0 \end{aligned}\right.$$

$$(b)\qquad \left\{\begin{aligned} &\delta\sigma_x \cos(n.x)+\delta\tau_{xy}\cos(n.y)+\delta\tau_{zx}\cos(n.z)=0\\ &\delta\tau_{xy}\cos(n.x)+\delta\sigma_y \cos(n.y)+\delta\tau_{yz}\cos(n.z)=0\\ &\delta\tau_{zx}\cos(n,x)+\delta\tau_{yz}\cos(n.y)+\delta\sigma_z \cos(n.z)=0 \end{aligned}\right.$$

rispettivamente in tutto lo spazio V occupato dal solido tagliato, e sulla superficie esterna che lo limita (sulla quale n indica come d'uso la normale in un punto generico rivolta verso l'interno di V); mentre sulle due faccie del taglio dovranno riuscir verificate delle equazioni del tipo

$$(c)\qquad \left\{\begin{aligned} &\pm\delta P_x+\delta\sigma_x \cos(n.x)+\delta\tau_{xy}\cos(n.y)+\delta\tau_{zx}\cos(n.z)=0\\ &\pm\delta P_y+\delta\tau_{xy}\cos(n.x)+\delta\sigma_y \cos(n.y)+\delta\tau_{yz}\cos(n.z)=0\\ &\pm\delta P_z+\delta\tau_{zx}\cos(n.x)+\delta\tau_{yz}\cos(n.y)+\delta\sigma_z \cos(n.z)=0 \end{aligned}\right.$$

intendendosi che il segno superiore si riferisce alla faccia α, e l'inferiore alla faccia β, conformemente a ciò che si è detto in proposito nella Nota precedente.

Poichè φ è una forma quadratica, si ha

$$\begin{aligned} &\int_V \varphi(\sigma_x+\delta\sigma_x\,,\sigma_y+\delta\sigma_y\,,\ldots\tau_{xy}+\delta\tau_{xy})\,dV-\int_V \varphi(\sigma_x\,,\sigma_y\,,\ldots\tau_{xy})\,dV=\\ &=\int_V\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_x}\delta\sigma_x+\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_y}\delta\sigma_y+\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_z}\delta\sigma_z+\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_{yz}}\delta\tau_{yz}+\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_{zx}}\delta\tau_{zx}+\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_{xy}}\delta\tau_{xy}\right]dV+\\ &+\int_V\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma_x^2}\overline{\delta\sigma_x}^2+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma_x\,.\,\partial\sigma_y}\delta\sigma_x\,.\,\delta\sigma_y+\cdots+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_{xy}^2}\overline{\delta\tau_{xy}}^2\right]dV\,. \end{aligned}$$

Prescindendo dal gruppo dei termini di second'ordine — del quale mi preme soltanto rilevare che è essenzialmente positivo — scriveremo la proposta variazione sotto la forma:

$$\delta\Phi=\int_V\left[\varepsilon_x\,\delta\sigma_x+\varepsilon_y\,\delta\sigma_y+\varepsilon_z\,\delta\sigma_z+\gamma_{yz}\,\delta\tau_{yz}+\gamma_{zx}\,\delta\tau_{zx}+\gamma_{xy}\,\delta\tau_{xy}\right]dV$$

Ma

$$\int_V \varepsilon_x \delta\sigma_x \, dV = \int_V \frac{\partial u}{\partial x} \delta\sigma_x \, dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x}(u\,.\,\delta\sigma_x)\,dV - \int_V u \frac{\partial(\delta\sigma_x)}{\partial x} dV =$$

$$= - \int_S u\,.\,\delta\sigma_x \cos(n\,.\,x)\,dS - \int_V u \frac{\partial(\delta\sigma_x)}{\partial x} dV$$

(con S indico qui, come già altrove, l'intiera superficie del solido tagliato, cioè il complesso costituito dalla superficie esterna propriamente detta, che separa V dallo spazio circostante, e dalle due faccie del taglio praticato lungo Σ).

Similmente

$$\int_V \gamma_{yz} \delta\tau_{yz} \, dV = \int_V \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \delta\tau_{yz} \, dV =$$

$$= \int_V \left[\frac{\partial}{\partial y}(w\,.\,\delta\tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(v\,.\,\delta\tau_{yz}) \right] dV - \int_V \left[w \frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial y} + v \frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial z} \right] dV =$$

$$= - \int_S \left[w\,.\,\delta\tau_{yz} \cos(n\,.\,y) + v\,.\,\delta\tau_{yz} \cos(n\,.\,z) \right] dS -$$

$$- \int_V \left[w \frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial y} + v \frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial z} \right] dV\,.$$

Operando queste sostituzioni e le loro analoghe, ed ordinando, si ottiene facilmente:

$$\delta\Phi = - \int_V \left\{ \left[\frac{\partial(\delta\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\tau_{zx})}{\partial z} \right] u + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial(\delta\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\sigma_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial z} \right] v + \left[\frac{\partial(\delta\tau_{zx})}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\sigma_z)}{\partial z} \right] w \right\} dV -$$

$$- \int_S \left\{ \left[\delta\sigma_x \cos(n\,.\,x) + \delta\tau_{xy} \cos(n\,.\,y) + \delta\tau_{zx} \cos(n\,.\,z) \right] u + \right.$$

$$+ \left[\delta\tau_{xy} \cos(n\,.\,x) + \delta\sigma_y \cos(n\,.\,y) + \delta\tau_{yz} \cos(n\,.\,z) \right] v +$$

$$\left. + \left[\delta\tau_{zx} \cos(n\,.\,x) + \delta\tau_{yz} \cos(n\,.\,y) + \delta\sigma_z \cos(n\,.\,z) \right] w \right\} dS\,.$$

Tenuto poi conto delle condizioni (*a*), (*b*) e (*c*) imposte da principio, questa espressione si riduce subito a

$$\delta\Phi = \int_{\Sigma\,(\text{faccia } \alpha)} (\delta P_x\,.\,u_\alpha + \delta P_y\,.\,v_\alpha + \delta P_z\,.\,w_\alpha)\,d\Sigma -$$

$$- \int_{\Sigma\,(\text{faccia } \beta)} (\delta P_x\,.\,u_\beta + \delta P_y\,.\,v_\beta + \delta P_z\,.\,w_\beta)\,d\Sigma =$$

$$= - \int_\Sigma (\delta P_x\,.\,\Delta u + \delta P_y\,.\,\Delta v + \delta P_z\,.\,\Delta w)\,d\Sigma\,.$$

Ma le discontinuità Δu, Δv, Δw, lo abbiamo già detto più di una volta nella Nota precedente, sono nella presente trattazione da considerarsi come delle costanti — esse sono infatti nè più nè meno che i dati del problema — sicchè si può scrivere addirittura

$$\delta\Phi = -\delta \int_\Sigma (\mathrm{P}_x \Delta u + \mathrm{P}_y \Delta v + \mathrm{P}_z \Delta w)\, d\Sigma$$

o, ciò che fa lo stesso,

$$\delta \left[\Phi + \int_\Sigma (\mathrm{P}_x \Delta u + \mathrm{P}_y \Delta v + \mathrm{P}_z \Delta w)\, d\Sigma \right] = 0 .$$

Si può esprimere questo risultato dicendo che:

lo stato di tensione incognito, proprio della considerata distorsione, è quello che rende minima la funzione

$$\Phi + \int_\Sigma (\mathrm{P}_x \Delta u + \mathrm{P}_y \Delta v + \mathrm{P}_z \Delta w)\, d\Sigma$$

compatibilmente coi valori dati delle discontinuità su Σ.

Non sarà inutile, a questo punto, un'osservazione.

L'espressione testè scritta misura evidentemente l'energia potenziale che, operando la proposta distorsione, si viene a comunicare al solido tagliato, supposto sollecitato sulle due faccie del taglio dalle forze

$$\pm \mathrm{P}_x \,,\quad \pm \mathrm{P}_y \,,\quad \pm \mathrm{P}_z \,.$$

È dunque quella stessa espressione che si dovrebbe rendere minima quando, per identificare la configurazione di equilibrio di un tal solido, si volesse ricorrere al procedimento classico che fa capo al teorema dei lavori virtuali.

Senonchè questo procedimento, presupponendo date le forze deformatrici ed incogniti i parametri geometrici della deformazione, caratterizza la configurazione risolvente come la sola, tra tutte quelle che il solido tagliato potrebbe assumere, alla quale corrisponda uno stato di tensione in equilibrio colle forze date.

Il ragionamento che io sono venuto sviluppando procede invece, in certo qual modo, in senso opposto; le P_x, P_y, P_z sono, come ho dichiarato esplicitamente fin da principio, variabili insieme collo stato interno di tensione, col quale si mantengono sempre in equilibrio; il minimo della espressione scritta si stabilisce pertanto per rispetto a tutti gli stati di tensione equilibrati, tra i quali si viene a caratterizzare quello risolvente come il solo a cui corrisponda una configurazione del solido tagliato compatibile colle condizioni geometriche (discontinuità Δu, Δv, Δw degli spostamenti in corrispondenza del taglio) che costituiscono i dati del nostro problema.

È intanto assai facile rendersi conto del modo con cui il nuovo teorema potrà venire in pratica utilizzato. Si può infatti dimostrare che:

l'identificazione dello stato di tensione incognito può farsi dipendere dalla risoluzione di un sistema di r equazioni lineari fra r incognite tutte le volte che si sa in precedenza che esso appartiene ad una classe di stati equilibrati tale che si possano riferire i singoli stati della classe ai singoli sistemi di valori di r parametri indipendenti

$$X_1, X_2, \dots X_r$$

biunivocamente e linearmente, cioè in modo che tanto le forze P_x, P_y, P_z *come le componenti speciali di tensione* $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ *risultino funzioni lineari di quegli r parametri.*

Infatti, nelle ipotesi fatte, la funzione Φ, che è notoriamente quadratica nelle $\sigma_x, \sigma_y, \dots \tau_{xy}$, risulterà tale anche nelle $X_1, X_2, \dots X_r$; mentre

$$\int_\Sigma (P_x \Delta u + P_y \Delta v + P_z \Delta w)\, d\Sigma$$

che è lineare nelle P_x, P_y, P_z, risulterà necessariamente lineare anche nelle nuove variabili.

Le r equazioni in cui si scinde la imposta condizione di minimo:

$$\frac{\partial}{\partial X_1}\left[\Phi + \int_\Sigma (P_x \Delta u + P_y \Delta v + P_z \Delta w)\, d\Sigma\right] = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial}{\partial X_r}\left[\Phi + \int_\Sigma (P_x \Delta u + P_y \Delta v + P_z \Delta w)\, d\Sigma\right] = 0$$

saranno quindi certamente lineari, non omogenee, negli r parametri, i cui valori risulteranno per conseguenza completamente determinati.

Non è senza interesse avvertire che l'accennato riferimento lineare ad un numero finito di parametri indipendenti si presenta immediato nei più interessanti casi particolari; esso fu dal Volterra illustrato nella sua già citata trattazione dei *sistemi ciclici di elementi elasticamente pieghevoli*; esso viene d'altra parte correntemente utilizzato dai tecnici nello studio di quelle particolari distorsioni che si generano nelle costruzioni in seguito a difetti di esecuzione, ad errori di montaggio od a cedimenti dei vincoli.

Chè anzi le equazioni con cui si perviene a risolvere questi problemi mediante la replicata applicazione del teorema di Castigliano, altro non sono che un caso molto particolare di quelle testè ottenute [1].

[1] Cfr. G. Colonnetti, *Applicazione a problemi tecnici di un nuovo teorema sulle coazioni elastiche*. Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. LIV (in corso di stampa).