ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

mondo, qual'è l'Osservatorio Vesuviano e le altre stazioni geodinamiche d'Italia [1].

Tutto sta trovare la via di superare le difficoltà giuridiche per ridurre nostra proprietà demaniale il possesso sequestrato al Friedlaender; superatele, come credo possibile, converrà erigere in ente morale un Istituto vulcanologico proprietario del possesso medesimo, dell'Osservatorio Vesuviano e delle Stazioni geodinamiche ora rispettivamente dipendenti dal Ministero dell'Istruzione e da quello di Agricoltura.

Sarà poi ottima cosa affinchè l'ente possa esplicare intera la sua attività scientifica, che con gl'Italiani vi cooperino gli scienziati Belgi, Francesi, Inglesi, Americani, e Giapponesi più di tutti versati in materia; e contribuendovi i loro Governi in qualche modo, ne riceverà l'Istituto un'impronta interalleata valevole ad impedire che esso ricada direttamente, o per mezzo d'interposti Governi neutrali, sotto il predominio germanico.

In nome della R. Accademia dei Lincei faccio voti che il nostro Governo curi con sollecitudine l'effettuazione di questo programma che gioverà non poco al prestigio scientifico dell'Italia.

Matematica. — *Delle varietà a tre dimensioni con terne ortogonali di congruenze a rotazioni costanti.* Nota del Socio GREGORIO RICCI [2].

In due Note recenti inserite nel volume XXVII (serie 5ª) di questi Rendiconti ho dimostrato che le varietà a tre dimensioni dotate di terne principali di congruenze geodetiche si ripartiscono in due classi, una delle quali è costituita da varietà tali che le rotazioni delle loro terne principali sono tutte costanti. Non sono però con questa classe esaurite tutte le V_3 dotate di terne ortogonali a rotazioni costanti; interessanti e perchè ammettono gruppi continui transitivi di movimenti rigidi, e perchè possono essere in modo assai facile caratterizzate intrinsecamente, e perchè la loro determinazione intrinseca [3], a traverso una opportuna terna fondamentale, dipende da quella di una soluzione particolare (soggetta soltanto ad una condizione qualitativa poco restrittiva) di un sistema differenziale di 1° ordine di strut-

[1] Lascio al collega prof. Chistoni di coordinare la funzione di questo Istituto vulcanologico con l'Istituto universitario geofisico che egli vagheggia di veder sorgere ai Campi Flegrei a corredo della Cattedra di Fisica terrestre.

[2] Pervenuta all'Accademia il 28 giugno 1918.

[3] A questo proposito e a chiarimento anche dei risultati delle precedenti Note giova osservare che, trattandosi di determinazione intrinseca, non si devono considerare come distinte due terne, che si trasformano l'una nell'altra per effetto di una trasformazione in se stesso del ds^2 della varietà.

tura assai semplice, la cui soluzione generale non comporta altra arbitrarietà che quella che è rappresentata dall'arbitrarietà della scelta delle variabili indipendenti.

Ogni V_3 che ammetta una terna ortogonale a rotazioni costanti ne ammette una triplice infinità, e cioè tutte quelle, che da una di essa si traggono mediante una arbitraria sostituzione ortogonale a coefficienti costanti. Tra tutte occupano però un posto speciale quelle (in generale una sola) che ho chiamate *terne principali di 2ª specie*, la cui proprietà caratteristica consiste in ciò, che per ogni punto P della varietà e per ogni congruenza ψ_h della terna sono eguali le proiezioni sulla tangente alla sua linea passante per P delle curvature geodetiche delle linee delle congruenze ψ_{h+1} e ψ_{h+2} passanti per lo stesso punto. Così le nove rotazioni spettanti ad una terna principale di 2ª specie si possono esprimere mediante sei sole costanti, e queste possono essere ripartite tra le tre congruenze assegnandone a ciascuna due e precisamente ad ogni congruenza ψ_h la sua anormalità α_h e la proiezione δ_h sulla tangente alla sua linea uscente da un punto qualunque P della curvatura geodetica della linea uscente dal medesimo punto e appartenente all'una o all'altra delle congruenze ψ_{h+1} e ψ_{h+2}. Di più si ha che:

« Per ogni congruenza di una terna principale di 2ª specie deve essere
« eguale a 0 l'una o l'altra delle due costanti caratteristiche ad essa asse-
« gnate ».

Dai diversi possibili modi di soddisfare a questa condizione segue una ripartizione delle possibili terne principali di 2ª specie in quattro classi, le quali però, per quanto riguarda la natura intrinseca delle varietà, a cui esse appartengono, si riducono a tre sole essenzialmente distinte e caratterizzate come segue:

$$(a) \qquad \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0 \,,$$

$$(b) \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \;,\; \delta_3 > 0 \,,$$

$$(c) \qquad \delta_1 = \delta_2 = \alpha_3 = 0 \;,\; \alpha_2 > 0 \;,\; \delta_3 \neq 0 \,.$$

Lo studio della classe (a) è stato esaurito nelle Note citate, nelle quali è stato posto in evidenza come con riguardo ai valori delle caratteristiche α_1, α_2, α_3 essa si scinda in tre sottoclassi distinte. Quello delle altre due classi forma oggetto della presente Nota, e conduce alle seguenti conclusioni:

1°. Le terne della classe (b) appartengono alle varietà a curvatura costante negativa o nulla $K = -\Sigma_i \delta_i^2$. Per esse risultano determinati in ciascuna di tali varietà ∞^3 sistemi coordinati ortogonali, i quali per $K=0$, coincidono coi sistemi cartesiani, mentre per $K<0$ ne costituiscono una naturale e nota estensione.

2°. Le terne della classe (c) forniscono ancora delle speciali espressioni per il ds^2 delle varietà a curvatura costante negativa $K = -\delta_3^2$, se è

$\alpha_2 = \alpha_1$; e, prescindendo da questo caso, si possono suddividere in due sottoclassi, secondo che è $\alpha_2 \alpha_1 = -\delta_3^2$ ovvero $\alpha_2 \alpha_1 \neq -\delta_3^2$. E mentre le V_3 della prima sottoclasse hanno due invarianti principali eguali negativi e in valore assoluto maggiori del terzo, che è positivo, quelli delle varietà dell'altra sottoclasse sono tutti distinti, essendo tutti negativi e del resto qualunque, ovvero due negativi e l'altro positivo ma legato agli altri due da speciali condizioni di disuguaglianza. Appartengono a quest'ultima sottoclasse le varietà normali di Bianchi, per le quali una curvatura principale è media geometrica delle altre due.

È ancora da rilevare che, mentre nelle V_3 delle classi (a) e (b) le terne principali di 1ª e di 2ª specie coincidono, in quelle della classe (c) una sola congruenza (che è insieme normale e geodetica) è comune alle due terne. E poichè nella classe (c) incontriamo delle varietà, i cui invarianti principali hanno valori riconosciuti possibili anche per varietà della classe (a), ne concludiamo che i valori delle curvature riemanniane principali non bastano sempre per caratterizzare intrinsecamente una V_3 a curvature principali costanti.

In questa Nota, che intimamente si connette a quelle più volte citate, mi riferirò alle notazioni ed ai concetti fondamentali, di cui in esse feci uso e che vennero in esse esposti.

1. Si consideri ancora una V_3 qualunque definita intrinsecamente mediante tre forme differenziali lineari indipendenti ψ_1, ψ_2, ψ_3, alle quali mediante una sostituzione ortogonale affatto qualunque

$$A \equiv ||\alpha_{hk}||$$

si sostituiscono rispettivamente le tre forme $\psi'_1, \psi'_2, \psi'_3$; e si convenga che i simboli e le notazioni relative a questa seconda terna fondamentale differiscano soltanto per un apice da quelle, di cui si è fatto uso per la terna ψ_1, ψ_2, ψ_3.

Le rotazioni relative alle due terne risultano legate fra di loro dalle relazioni:

$$\varrho'_{hk} = \Sigma_i\, \alpha_{ki}\, \Sigma_j \left(\alpha_{h+2j} \frac{\partial \alpha_{h+1j}}{\partial s_i} + \varrho_{ji}\, \alpha_{hj}\right). \tag{1}$$

Se a queste si aggiungono quelle, che si ottengono derivando intrinsecamente le

$$\Sigma_i\, \alpha_{hi}\, \alpha_{ki} = \varepsilon_{hk},$$

si ha un sistema costituito da tante equazioni quante sono le derivate intrinseche delle α_{hk} e risolubile rispetto a queste. E se le espressioni di queste derivate si derivano ancora intrinsecamente e tra esse e le espressioni così ottenute per le derivate intrinseche di 2° ordine si eliminano queste e le derivate prime, si perviene alle relazioni

$$\omega'_{hk} = \Sigma_{ij}\, \omega_{ij}\, \alpha_{hi}\, \alpha_{kj}\,,$$

dalle quali segue che di fronte ad ogni sostituzione ortogonale le ω_{ij} si comportano come i coefficienti di una quadrica covariante.

Si suppongano ora le ϱ_{hk} costanti. Per le (3) delle Note citate [1] saranno tali anche le ω_{hk} e quindi i coefficienti della sostituzione ortogonale, che riduce a forma canonica la quadrica anzidetta nonchè i coefficienti della espressione ridotta, cioè le curvature riemanniane principali della V_3 definita dal sistema di forma ψ_i. Dunque:

« Le V_3 dotate di terne ortogonali a rotazioni costanti hanno costanti « anche le curvature riemanniane principali ».

Si ponga ora mente alle (1), dalle quali risulta che la forma bilineare di coefficienti ϱ_{ij} è essa pure covariante di fronte ad ogni sostituzione ortogonale a coefficienti costanti; donde segue che, se le ϱ_{ij} sono costanti, tra le sostituzioni stesse ve n'ha una (ed in generale una sola) che riduce a forma canonica la quadrica di coefficienti $\frac{1}{2}(\varrho_{ij}+\varrho_{ji})$.

La corrispondente terna ortogonale, che ho chiamata *terna principale di 2ª specie*, è dunque caratterizzata dalla proprietà che le sue rotazioni sono costanti e legate dalle relazioni

$$\varrho_{h+1\,h+2} + \varrho_{h+2\,h+1} = 0\,,$$

cioè

$$\gamma_{h+1h\,h+1} = \gamma_{h+2h\,h+2}\,,$$

dalle quali risulta che, se si considerano le tre linee delle congruenze principali di 2ª specie uscenti da uno stesso punto qualunque P della varietà, le proiezioni sulla tangente ad una qualunque di esse delle curvature geodetiche delle altre due sono eguali [2]:

2. Posto

$$\delta_h = \varrho_{h+1\,h+2} = -\,\varrho_{h+2\,h+1}\,,$$

le formole citate sopra per le terne principali di 2ª specie nelle varietà, di cui ci occupiamo, dànno

$$\omega_{hh} = -\,\Sigma_i\,\delta_i^2 + \varrho_h\,\alpha_h - \varrho_{h+1}\,\varrho_{h+2} \tag{2}$$

$$\omega_{h+1\,h+2} = 2\delta_h\,\varrho_{h+1}\quad,\quad \omega_{h+2\,h+1} = -\,2\delta_h\,\varrho_{h+2} \tag{3}$$

[1] Queste formole sono affette da un errore tipografico, per il quale il 1° termine del secondo membro porta indebitamente il segno — .

[2] Cfr. Ricci, *Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque*, Memorie della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. II, pag. 2.

e le equazioni (A) e (B) assumono rispettivamente la forma:

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial \lambda_{h/r+1}}{\partial x_{r+2}} - \frac{\partial \lambda_{h/r+2}}{\partial x_{r+1}} = \lambda(\alpha_h \lambda_h^{(r)} + \delta_{h+2} \lambda_{h+1}^{(r)} - \delta_{h+1} \lambda_{h+2}^{(r)})$$

$$\text{(B)} \qquad \alpha_h \delta_h = 0 .$$

Il caso studiato nelle Note precedenti è quello, in cui le (B) sono soddisfatte perchè sono nulle tutte le δ_h ed abbiamo già osservato che, per le (3) avendosi allora $\omega_{h+1\,h+2} = \omega_{h+2\,h+1} = 0$, la terna principale di 2ª specie è anche terna principale di 1ª specie. Ciò si verifica ancora e soltanto in un altro caso, cioè se le (B) sono soddisfatte perchè sono nulle tutte le α_h e quindi tutte le ϱ_h. Le (2) dànno allora

$$\omega_{hh} = - \Sigma_i \delta_i^2$$

e ci dicono che si tratta di varietà a curvatura costante negativa o nulla

$$\text{(4)} \qquad K = - \Sigma_i \delta_i^2 .$$

Posto

$$\text{(5)} \qquad H = \Sigma_i \delta_i x_i + c$$

(c costante arbitraria) si soddisfa in questo caso alle equazioni (A) assumendo:

$$\lambda_{h/h} = \frac{1}{H} \quad ; \quad \lambda_{h+1/h+2} = \lambda_{h+2/h+1} = 0 ,$$

cioè

$$\psi_h = \frac{dx_h}{H} .$$

Si perviene così alla espressione

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{H^2}$$

del ds^2 delle V_3 a curvatura costante negativa o nulla.

3. Esclusi i casi già considerati, possiamo supporre eguali a 0 δ_1 ed α_3; dopo di che tra le equazioni (B) rimane da soddisfare soltanto la $\alpha_2 \delta_2 = 0$. Si osservi ora che la ipotesi che α_2 sia zero assieme ad α_3 ha per conseguenza $\varrho_2 = \varrho_3 = -\varrho_1$, e quindi la arbitraria orientazione della dupla ψ_2, ψ_3 nel proprio piano. Ed è pure facile riconoscere che questa orientazione può essere determinata in modo che sia $\delta_2 = 0$.

Un altro solo caso essenzialmente distinto da quelli già considerati ci rimane dunque da prendere in esame; quello, nel quale alle (B) si soddisfa assumendo

$$\text{(6)} \qquad \delta_1 = \delta_2 = \alpha_3 = 0 ;$$

nel quale la congruenza ψ_3 risulta quindi insieme geodetica e normale.

Posto δ in luogo di δ_3, le (2) e le (3) ci dànno per questo caso

$$(7)\quad \begin{cases} \omega_{11} = \left(\dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)^2 - \alpha_1^2 - \delta^2 \ , \ \omega_{22} = \left(\dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)^2 - \alpha_2^2 - \delta^2 \,; \\ \omega_{33} = \left(\dfrac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)^2 - \delta^2 \,, \\ \omega_{23} = \omega_{31} = 0 \quad , \quad \omega_{21} = (\alpha_2 - \alpha_1)\,\delta \,. \end{cases}$$

La equazione di 3° grado, che colle sue radici fornisce le curvature riemanniane principali della V_3, si scinde poi nelle due equazioni:

$$\omega^2 + (\omega_{11} + \omega_{22})\,\omega + \omega_{11}\,\omega_{22} - \omega_{12}^2 = 0$$
$$\omega = \omega_{33} \,.$$

Posto

$$(8)\qquad \Delta = \left| \sqrt{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + 4\delta^2} \right|$$

abbiamo dunque per le dette curvature le espressioni

$$\omega'_{11} = -\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\,\Delta - \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)^2 - \delta^2$$
$$\omega'_{22} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\,\Delta - \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)^2 - \delta^2$$
$$\omega'_{33} = \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)^2 - \delta^2 \,;$$

mentre

$$(9)\quad \begin{cases} \omega_1 = \dfrac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\,\Delta - 2\delta^2 \quad , \quad \omega_2 = -\dfrac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\,\Delta - 2\delta^2 \,, \\ \omega_3 = -2\left(\dfrac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)^2 - 2\delta^2 \end{cases}$$

sono quelle degli invarianti principali.

a) Suppongasi dapprima $\alpha_2 = \alpha_1 = \alpha$. La varietà sarà a curvatura costante negativa $K = -\delta^2$ e si soddisfarà alle equazioni (A) assumendo

$$\psi_1 = dx_1 + (\delta x_1 - \alpha x_2)\,dx_3$$
$$\psi_2 = dx_2 + (\alpha x_1 + \delta x_2)\,dx_3$$
$$\psi_3 = dx_3 \,;$$

donde una nuova espressione pel ds^2 delle varietà a curvatura costante negativa.

b) Sia

$$\delta^2 = -\alpha_1\,\alpha_2 \,,$$

essendo $\alpha_2 > 0$, $\alpha_1 < 0$. Sarà

$$\Delta = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$\omega_1 = \left(\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}\right)^2 \quad , \quad \omega_2 = \omega_3 = 2\alpha_1\alpha_2 - \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)^2 .$$

Si tratta dunque di varietà, di cui due invarianti principali sono negativi, eguali e maggiori in valore assoluto dell'altro, che è positivo.

In queste varietà la congruenza principale ψ'_1 è determinata, mentre la coppia ψ'_2, ψ'_3 può essere scelta arbitrariamente nel piano a quella normale. In particolare si passa dalla terna principale di 2ª specie ψ_1, ψ_2, ψ_3 ad una terna principale di 1ª specie tenendo ferma la congruenza ψ_3 ed eseguendo sulla coppia ψ_1, ψ_2 la sostituzione ortogonale

$$A \equiv \begin{Vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{Vmatrix}$$

essendo

$$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{-\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}} \quad , \quad \sin\theta = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}} ,$$

valendo il segno superiore o l'inferiore secondo che $\delta = \pm\left|\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1}\right|$ è positiva o negativa.

Si soddisfa in questo caso alle equazioni (A) assumendo

$$\begin{aligned} \psi_1 &= dx_1 + (\delta x_1 - \alpha_1 x_2)\, dx_3 \\ \psi_2 &= dx_2 + (\alpha_2 x_1 + \delta x_2)\, dx_3 \\ \psi_3 &= dx_3 . \end{aligned}$$

È poi facile riconoscere che, assieme alla congruenza principale $\psi'_3 \equiv \psi_3$, (che è pure geodetica) è normale anche la

$$\psi'_2 = \sin\theta\, \psi_1 + \cos\theta\, \psi_2 .$$

c) Tra le V_3, di cui ci occupiamo, rimangono da considerare quelle, le cui curvature riemanniane principali sono tutte distinte.

Dalle (9) seguono le

$$(10) \qquad \begin{cases} \omega_1 + \omega_2 = -4\delta^2 \\ \omega_1 - \omega_3 + \omega_2 - \omega_3 = (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \\ \omega_1(\omega_1 - \omega_3) + \omega_2(\omega_2 - \omega_3) = \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)^2\,(\alpha_2 + \alpha_1)^2 , \end{cases}$$

le quali ci permettono di concludere:

1°) che esistono V_3, i cui invarianti principali sono tutti costanti negativi, distinti qualunque. Infatti, assegnati del resto comunque i valori dei tre invarianti principali, basta assumere per ω_3 quello, che è massimo in valore assoluto, perchè dalle (10) risultino valori reali per α_1, α_2 e δ;

2°) che esistono V_3 per le quali gli invarianti principali sono costanti purchè tali che uno di essi ω_1, sia positivo e gli altri due negativi e tali che siano verificate le disuguaglianze:

$$\omega_1 + \omega_2 < 0 \quad , \quad \omega_3 > \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} .$$

Nell'un caso e nell'altro ai diversi sistemi di valori reali di α_1, α_2, δ, che dalle (10) si traggono, dati quelli di ω_1, ω_2, ω_3, non corrispondono varietà essenzialmente distinte; ma semplicemente lo scambio delle congruenze ψ_1 e ψ_2 o l'inversione dei sensi positivi delle loro linee.

La sostituzione ortogonale, per la quale si passa dalla terna principale di 2ª a quella di 1ª specie è anche in questo caso una sostituzione binaria A da eseguire sopra ψ_1 e ψ_2, essendo

$$(11) \qquad \cos\theta = \pm \sqrt{\frac{\Delta - (\alpha_2 + \alpha_1)}{2\Delta}} \quad , \quad \sin\theta = \sqrt{\frac{\Delta + \alpha_2 + \alpha_1}{2\Delta}} ,$$

e valendo il segno superiore o l'inferiore, secondo che δ è positiva o negativa.

Per ψ_1, ψ_2 e ψ_3 valgono ancora le stesse espressioni che nel caso (*b*).

Delle congruenze principali di 1ª specie, in generale, è normale la sola $\psi'_3 \equiv \psi_3$, che è pure geodetica. Le altre due ψ'_1 e ψ'_2 sono o non sono normali insieme; e sono normali soltanto se è $\alpha_2 + \alpha_1 = 0$. In questo caso gli invarianti principali hanno le espressioni

$$\omega_1 = -2\delta(\alpha_1 + \delta) \quad , \quad \omega_2 = 2\delta(\alpha_1 - \delta) \quad , \quad \omega_3 = -2(\alpha_1^2 + \delta^2) .$$

Le curvature principali sono invece

$$\omega'_{11} = -(\alpha_1 - \delta)^2 \quad , \quad \omega'_{22} = -(\alpha_1 + \delta)^2 \quad , \quad \omega'_{33} = \alpha_1^2 - \delta^2 ,$$

donde

$$\omega'^2_{33} = \omega'_{11}\,\omega'_{22} .$$

Si tratta dunque di quelle varietà normali di Bianchi, per le quali una curvatura principale è media geometrica delle altre due.

In fine osserviamo che dalle espressioni trovate per ψ_1, ψ_2, ψ_3 nei singoli casi risultano per il ds^2 delle varietà considerate in questo paragrafo delle espressioni, che si possono tutte comprendere nella seguente:

$$\begin{aligned} ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \{ (\alpha_2^2 + \delta^2)\, x_1^2 + (\alpha_1^2 + \delta^2)\, x_2^2 + \\ + 2\delta(\alpha_1 - \alpha_2)\, x_1 x_2 \}\, dx_3^2 + \\ + 2\, \{ (\delta x_1 - \alpha_1 x_2)\, dx_1 + (\delta x_2 + \alpha_2 x_1)\, dx_2 \}\, dx_3 ; \end{aligned}$$

e che

$$dx_2 = dx_3 = 0 \quad ; \quad dx_1 = dx_3 = 0 ;$$

$$dx_1 + (\delta x_1 - \alpha_1 x_2)\, dx_3 = 0 \quad , \quad dx_2 + (\delta x_2 + \alpha_2 x_1)\, dx_3 = 0$$

sono le equazioni delle congruenze principali di 2ª specie; e

$$\sin\theta\, dx_1 + \cos\theta\, dx_2 = 0 \ , \ dx_3 = 0 ;$$

$$\cos\theta\, dx_1 - \sin\theta\, dx_2 = 0 \ , \ dx_3 = 0 ;$$

$$dx_1 + (\delta x_1 - \alpha_1 x_2)\, dx_3 = 0 \quad , \quad dx_2 + (\delta x_2 + \alpha_2 x_1)\, \delta x_3 = 0$$

quelle delle congruenze principali di 1ª specie.

Matematica. — *Fondamenti di geometria proiettivo-differenziale di una superficie* [1]. Nota II del Corrisp. Guido Fubini [2].

6. Studio proiettivo di S. — Dal nostro punto di vista è naturalmente opportuno porre $g = \varphi_2$, che è invariante per collineazioni, ed usare coordinate normali. Si trova, essendo $F_2 = \varphi_2$, ecc., e indicato con S_p il valore corrispondente di S

(24) $\quad S_p = \varrho^4 S_m = N^2 \sqrt{K}\, S_m$

(25) $\quad S_p = - d[\sqrt{\nabla}\,(du\, \delta^2 v - dv\, \delta^2 u)]\, \varphi_2 +$
$$+ \sqrt{\nabla}\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u)\,(\tfrac{3}{2}\, d\varphi_2 + \varphi_3) + (x\,,\, Dx\,,\, D_2 x\,,\, D_3 x)$$

ove *i simboli* δ^2, D *sono relativi alla* φ_2 [e non all'elemento lineare di Gauss, come in $(22)_{bis}$]. Le (23), (24) *dànno il significato metrico di* S_p. Una superficie essendo completamente determinata (a meno di collineazioni) da S_p, si trae da (25): *Una superficie è completamente determinata nel gruppo proiettivo dalle tre forme* $\varphi_2\,,\varphi_3\,,(x\,.\,Dx\,,\,D_2x\,.\,D_3x)$ (la seconda delle quali, come risulterà da quanto segue, è perfettamente determinata dalle altre due). Dividendo covariantemente la terza per la prima si abbia:

$$(x\,,\,Dx\,,\,D_2x\,,\,D_3x) = \overline{\psi}_6 + \overline{\psi}_4\,\varphi_2 + \overline{\psi}_2\,\varphi_2^2 + \overline{\psi}_0\,\varphi_2^3 \qquad (\overline{\psi}_n \text{ coniugate a } \varphi_2).$$

Proveremo che: *La forma* $\overline{\psi}_0$ *è identicamente nulla; le forme* $\overline{\psi}_4\,,\overline{\psi}_6$ *sono completamente determinate dalle* $\varphi_2\,,\varphi_3$ (anzi $\overline{\psi}_6$ è il prodotto di φ_3 per il suo covariante cubico $\overline{\varphi}_3$). Ne risulterà così provato:

Date le forme $\varphi_2\,.\,\varphi_3$, *una superficie è completamente determinata nel gruppo proiettivo dalla sola forma quadratica* $\overline{\psi}_2$, *anch'essa coniu-*

[1] Cfr. la Nota I a pag. 11 di questi Rendiconti.
[2] Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1918.