ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

un quarto degli 88 conosciuti); per essi il rapporto in questione varia fra 1,87 e 7,55. Dei 22 valori singoli, *uno* è inferiore a 2, *dodici* stanno fra 2 e 3, *due* fra 3 e 4, *sette* fra 4 e 5 e *uno* è superiore a 7. Per scoprire in questo quadro una sicura tendenza alla costanza bisogna essere invero di facile contentatura! Caso mai si potrebbe dire che i valori tendano ad addensarsi in due gruppi attorno ai valori 2, 5 e 4, 5.

Si noti poi che dei 22 punti critici solo 8 sono determinati sperimentalmente, mentre gli altri 14 sono dedotti dai punti di ebullizione in base alla regola di Guldberg e Guye. Pare quindi che fosse inutile scomodare il punto critico e che fosse preferibile limitarsi a considerare empiricamente le relazioni fra punto di fusione e punto di ebollizione a pressione ordinaria. Poichè, ammettendo valida la regola di Guldberg-Guye, se fosse $\frac{T_{cr}}{T_f} = C$, dovrebbe essere $\frac{T_{eb}}{T_f} = \frac{2}{3} C$, ossia anche questo rapporto dovrebbe essere costante.

E che ciò non sia in generale, nemmeno nell'interno di certe serie omologhe, sanno già gli studenti di Chimica organica i quali imparano anche nei trattati elementari (¹) che in alcune serie (p. es. in quella degli acidi grassi) i punti di ebollizione crescono regolarmente col crescere del numero degli atomi di carbonio, mentre i punti di fusione seguono due andamenti diversi secondo che gli atomi di carbonio sono in numero pari o dispari e ognuna di queste due curve prima scende, poi dopo un minimo tende a salire.

Si può dunque concludere che le deduzioni di Herz non hanno alcuna portata teorica, e come constatazioni empiriche, o non sono esatte, o non aggiungono nulla a ciò che si sapeva.

Matematica. — *Il metodo di sommazione di Eulero e la moltiplicazione delle serie.* Nota di GUSTAVO SANNIA, presentata dal Socio ENRICO D'OVIDIO.

Fra i varî metodi di sommazione delle serie, il *metodo di Cesàro* e il *metodo di Borel generalizzato* (²) sono importanti, principalmente perchè alle serie sommabili con essi è applicabile *incondizionatamente* la regola di Cauchy per la moltiplicazione. Infatti: se due serie

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots , \quad v_0 + v_1 + v_2 + \cdots \tag{1}$$

sono sommabili col metodo di Cesàro (col metodo di Borel generalizzato) ed

(¹) Holleman, *Trattato di Chimica organica*, 2ª ed. pp. 96-97, fig. 28.

(²) Che ho esposto ed applicato in varî recenti lavori.

hanno per somma u e v rispettivamente, la serie-prodotto

$$(2) \qquad u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_1) + \cdots$$

è *sempre* sommabile con lo stesso metodo ed ha per somma uv.

Orbene vi è un terzo metodo che gode della stessa proprietà, ed è il più antico metodo di sommazione delle serie divergenti.

Una serie

$$(3) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

è *sommabile col metodo di Eulero* ed ha per *somma* u quando la serie di potenze $\Sigma u_n x^n$ è convergente per $|x| < 1$ (ed allora lo è assolutamente) ed esiste ed è finito il numero

$$(4) \qquad u = \lim_{x=1-0} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n .$$

Ora sussiste il teorema:

Se due serie (1) *sono sommabili col metodo di Eulero ed hanno per somma u e v rispettivamente, anche la serie-prodotto* (2) *è sommabile col metodo di Eulero ed ha per somma uv.*

Infatti, giusta l'ipotesi e la definizione precedente, si ha che, per ogni x il cui modulo sia minore di 1, le due serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n , \quad \sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n$$

sono convergenti assolutamente e quindi moltiplicabili con la regola di Cauchy, dando luogo ad una serie anche assolutamente convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \times \sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0) x^n .$$

Da ciò e dall'ipotesi

$$\lim_{x=1-0} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = u \ , \ \lim_{x=1-0} \sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n = v$$

segue che

$$\lim_{x=1-0} \sum_{n=0}^{\infty} (u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0) x^n = uv ,$$

e quindi che la serie (2) è sommabile col metodo di Eulero ed ha per somma uv.

Come si vede, la dimostrazione è ben semplice. È poi quasi evidente che tutte le altre proprietà aritmetiche delle serie convergenti valgono per le serie sommabili col metodo di Eulero; sicchè questo metodo è, non solo aritmeticamente perfetto, ma anche di rapida e facile esposizione (¹).

Osservo infine che esso si può anche fondare partendo da quello stesso principio (di media baricentrica delle somme $U_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$) sul quale sono fondati i metodi di Cesàro e di Borel (originario o generalizzato). Perchè, essendo

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} U_n x^n = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (U_n - U_{n-1})\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n\,,$$

la definizione (4) del numero u equivale all'altra

$$u = \lim_{x=1-0} \frac{U_0 + U_1 x + U_2 x^2 + \cdots}{1 + x + x^2 + \cdots}\,.$$

Matematica. — *Sul numero delle partizioni d'un numero in potenze di* 2. Nota di ALBERTO TANTURRI, presentata dal Corrispondente G. PEANO.

In una Nota della R. Accad. delle Scienze di Torino (1° dic. 1918), alla quale si riferiscono tutte le citazioni della Nota presente, ho, per ogni numero naturale n, indicato con D_n il numero della partizioni di n in potenze di 2, anche uguali fra loro; e, poi, per ogni intero p, con $D(2^p, n)$ il numero di esse partizioni che han 2^p come elemento massimo: e, partendo da una formula di Eulero, ho scritto diverse proprietà di essi due numeri, e, per es., che è noto il primo quando si conosca il secondo. Di questo secondo accenno ora, per sommi capi, a uno studio un po' ampio; riducendomi, nel num. 1, al caso in cui n è un multiplo di 2^p, e trattando poi questo caso.

1. Le (24'), (25') e (26') dànno:

I $\quad n\varepsilon 2 + N_0 \cdot \supset \cdot D(2, n) = D[2, 2E(n/2)]\,;$

II $\quad n\varepsilon 4 + N_0 \cdot \supset \cdot D(4, n) = D[2, 2E(n/4)]\, D(2, n) - D[4, 4E(n/4)]\,;$

III $\quad n\varepsilon 8 + N_0 \cdot \supset \cdot D(8, n) = D[2, 2E(n/8)]\, D(4, n) -$
$\quad - D[4, 4E(n/8)]\, D(2, n) + D[8, 8E(n/8)]\,.$

In generale si dimostra la formula:

IV. $\quad p\varepsilon N_1 \cdot n\varepsilon 2^p + N_0 \cdot q = E(n/2^p) \cdot \supset \cdot D(2^p, n) =$
$\quad \Sigma[(-1)^{i-1}\, D(2^i, 2^i q)\, D(2^{p-i}, n) \mid i, 1 \cdots p]\,.$

(¹) Ed è anche più potente del metodo di Cesàro, perchè tutte le serie sommabili con questo metodo sono pure sommabili con esso. Ciò segue da un teorema di Bromwich (*An introduction to the theory of infinite series*, n. 123).