ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

le serie sommabili col metodo di Eulero; sicchè questo metodo è, non solo aritmeticamente perfetto, ma anche di rapida e facile esposizione [1].

Osservo infine che esso si può anche fondare partendo da quello stesso principio (di media baricentrica delle somme $U_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$) sul quale sono fondati i metodi di Cesàro e di Borel (originario o generalizzato). Perchè, essendo

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} U_n x^n = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (U_n - U_{n-1})\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n ,$$

la definizione (4) del numero u equivale all'altra

$$u = \lim_{x=1-0} \frac{U_0 + U_1 x + U_2 x^2 + \cdots}{1 + x + x^2 + \cdots} .$$

Matematica. — *Sul numero delle partizioni d'un numero in potenze di* 2. Nota di ALBERTO TANTURRI, presentata dal Corrispondente G. PEANO.

In una Nota della R. Accad. delle Scienze di Torino (1° dic. 1918), alla quale si riferiscono tutte le citazioni della Nota presente, ho, per ogni numero naturale n, indicato con D_n il numero della partizioni di n in potenze di 2, anche uguali fra loro; e, poi, per ogni intero p, con $D(2^p, n)$ il numero di esse partizioni che han 2^p come elemento massimo: e, partendo da una formula di Eulero, ho scritto diverse proprietà di essi due numeri, e, per es., che è noto il primo quando si conosca il secondo. Di questo secondo accenno ora, per sommi capi, a uno studio un po' ampio; riducendomi, nel num. 1, al caso in cui n è un multiplo di 2^p, e trattando poi questo caso.

1. Le (24'), (25') e (26') dànno:

I $\quad n\varepsilon 2 + N_0 \cdot \supset \cdot D(2, n) = D[2, 2E(n/2)]$;

II $\quad n\varepsilon 4 + N_0 \cdot \supset \cdot D(4, n) = D[2, 2E(n/4)]\, D(2, n) - D[4, 4E(n/4)]$;

III $\quad n\varepsilon 8 + N_0 \cdot \supset \cdot D(8, n) = D[2, 2E(n/8)]\, D(4, n) -$
$\qquad - D[4, 4E(n/8)]\, D(2, n) + D[8, 8E(n/8)]$.

In generale si dimostra la formula:

IV. $\quad p\varepsilon N_1 \cdot n\varepsilon 2^p + N_0 \cdot q = E(n/2^p) \cdot \supset \cdot D(2^p, n) =$
$\qquad \Sigma[(-1)^{i-1} D(2^i, 2^i q)\, D(2^{p-i}, n) \mid i, 1 \cdots p]$.

[1] Ed è anche più potente del metodo di Cesàro, perchè tutte le serie sommabili con questo metodo sono pure sommabili con esso. Ciò segue da un teorema di Bromwich (*An introduction to the theory of infinite series*, n. 123).

Sostituzioni successive daranno:

$$\text{II}' \quad n\varepsilon 4 + \mathrm{N}_0 \cdot \supset \cdot \mathrm{D}(4, n) = \mathrm{D}[2, 2\mathrm{E}(n/4)]\, \mathrm{D}[2, 2\mathrm{E}(n/2)] - \mathrm{D}[4, 4\mathrm{E}(n/4)];$$

$$\begin{aligned} \text{III}' \quad n\varepsilon 8 + \mathrm{N}_0 \cdot \supset \cdot \mathrm{D}(8, n) = & \; \mathrm{D}[2, 2\mathrm{E}(n/8)] \times \mathrm{D}[2, 2\mathrm{E}(n/4)] \times \mathrm{D}[2, 2\mathrm{E}(n/2)] \\ & - \quad '' \quad \times \mathrm{D}[4, 4\mathrm{E}(n/4)] \\ & - \mathrm{D}[4, 4\mathrm{E}(n/8)] \quad \times \quad '' \\ & + \mathrm{D}[8, 8\mathrm{E}(n/8)]; \text{ ecc.} \end{aligned}$$

Ed ecco il risultato generale. « Risolvo l'equazione:

$$(1) \qquad i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_p = p,$$

con le condizioni: *a*) i_1 è un N_1, e gli altri i sono degli N_0; *b*) per ogni $1 \cdots p, r$, il massimo valore di i_r è $p - r + 1$; *c*) se, per $p > 1$, i_r è un $2 \cdots p, k$, si prenderanno nulli i $k - 1$ numeri i immediatamente seguenti, cioè i numeri $i_{r+1}, i_{r+2}, \ldots, i_{r-k+1}$. Indicando allora, per ciascuna soluzione, con num i il numero degli i diversi da zero,

$$\mathrm{D}(2^p, n) = \Sigma(-1)^{p-\mathrm{num}\, i}\, \mathrm{D}[2^{i_1}, 2^{i_1}\mathrm{E}(n/2^p)]\, \mathrm{D}[2^{i_2}, 2^{i_2}\mathrm{E}(n/2^{p-1})] \ldots \\ \ldots \mathrm{D}[2^{i_p}, 2^{i_p}\mathrm{E}(n/2)],$$

estesa a tutte le soluzioni della (1) ». Queste soluzioni sono 2^{p-1}; come si dimostra osservando che, per es., dalle 4 soluzioni:

$$1\,1\,1, \quad 1\,2\,0, \quad 2\,0\,1, \quad 3\,0\,0,$$

della $i_1 + i_2 + i_3 = 3$, con le due operazioni da farsi su ciascuna:

aggiunta di un ultimo elemento 1;

aumento di 1 dell'ultimo elemento non nullo, e poi aggiunta di un ultimo elemento 0;

si hanno tutte le soluzioni della $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 4$; le quali sono dunque 8, e, precisamente, le:

$$\begin{matrix} 1\,1\,1\,1, & 1\,2\,0\,1, & 2\,0\,1\,1, & 3\,0\,0\,1, \\ 1\,1\,2\,0, & 1\,3\,0\,0, & 2\,0\,2\,0, & 4\,0\,0\,0. \end{matrix}$$

2. Veniamo al numero $\mathrm{D}(2^p, 2^p k)$. In virtù della (18):

$$\text{V} \quad p\varepsilon \mathrm{N}_1 \cdot k\varepsilon 1 + \mathrm{N}_1 \cdot \supset \cdot \mathrm{D}(2^p, 2^p k) = \mathrm{D}[2^p, 2^p(k-1)] + \\ + \mathrm{D}[2^{p-1}, 2^{p-1}(2k-1)].$$

La ricerca delle funzioni $\mathrm{D}(2, 2k)$, $\mathrm{D}(4, 4k)$, $\mathrm{D}(8, 8k)$, ..., è dunque un problema di differenze finite; trattandosi di trovare una successione: $f_1 k$, $f_2 k$, $f_3 k$, ..., di funzioni di k, tali che la prima differenza, $f_p k - f_p(k-1)$, di ciascuna, per il valore generico k, sia data dalla funzione precedente, per il valore $2k - 1$. Per i primi casi si ha subito:

$$\text{VI} \quad k \varepsilon N_1 \cdot \supset \cdot$$

$$D(2\,,2k) = C(k\,,1) = k\,.$$

$$D(4\,,4k) = C(k\,,2) + C(k+1\,,2) = k^2\,.$$

$$D(8\,,8k) = C(k\,,3) + 6C(k+1\,,3) + \\ + C(k+2\,,3) = C(2k+1\,,3) = k(4k^2-1)/3\,.$$

$$D(16\,,16k) = C(k\,,4) + 31C(k+1\,,4) + 31C(k+2\,,4) + \\ + C(k+3\,,4) = k^2(8k^2-5)/3\,.$$

$$D(32\,,32k) = C(k\,,5) + 196C(k+\mathrm{I}\,,5) + 630C(k+2\,,5) + \\ + 196C(k+3\,,5) + C(k+4\,,5)\,;$$

essendo C l'ordinario simbolo delle combinazioni. Ed ecco il risultato generale. « Si definisca una funzione $M(p\,,q)$, di p e q, ponendo:

$$\text{VII} \left\{ \begin{array}{l} M(0\,,0) = 1 \\ q \varepsilon N_1 \cdot \supset \cdot M(0\,,q) = 0 \\ p \varepsilon N_1 \cdot q \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot M(p\,,q) = \\ \quad = \Sigma[C(p+1\,,q-i)\,M(p-1\,,2i) \,|\, i\,,0 \cdots p-1] \quad \text{Def.}\,; \end{array} \right.$$

e si avrà la formula:

$$\text{VIII} \quad p_1 k \varepsilon N_1 \cdot \supset \cdot D(2^p\,,2^p k) = \\ = \Sigma[M(p-1\,,2i)\,C(k+i\,,p) \,|\, i\,,0 \cdots p-1] \text{ » } (^1).$$

Diamo i valori di M corrispondenti ai primi valori di p e q; nei posti vuoti si sottintendono degli zeri.

M	0	1	2	3	4	5	6	7 ... q
0	1							
1	1	2	1					
2	1	4	6	4	1			
3	1	10	31	44	31	10	1	
4	1	36	196	476	630	476	196	36
5	1	202	1821	6936	14562	18492	14562	6936
6	1	1828	27330	154772	473327	891976	1095836	891976
⋮								
p								

(1) La dimostrazione, tratta, per induzione, dalla V, dà i teoremi d'aritmetica: -

1) $t \varepsilon N_0 \;\; n \varepsilon 0 \cdots t \cdot \supset \cdot \Sigma[(-1)^i C(t+1\,,n+i)\,C(t+i\,,i) \,|\, i\,,0 \cdots t+1-n] = 0,$

2) $m \varepsilon N_0 \cdot n \varepsilon -m+1+N_0 \cdot \supset \cdot C(m+1\,n) = \\ \Sigma\{(-1)^i C(m+n-2i\,,m)\,C(m+1\,,i) \,|\, i\,,0 \cdots E[(n+3)/2]\}\,;$

il secondo dei quali suppone che, se n è un N_1: $a)$ $\Sigma(fi \,|\, i\,,0 \cdots -n) = f0$, qualunque sia la funzione fi di i, definita per $i = 0$; $b)$ $C(p\,,-n) = 0$, qualunque sia l'$N_0 p$. Quest'ultima convenzione si farà valere sino alla fine di questo scritto.

3. La VIII, contenendo solo i numeri $M(p-1\,,\,2i)$, farebbe apparire ingombrante l'introduzione degli M col secondo indice dispari. Ma, prima di tutto, quest'ultimi M compaiono nella formula:

$$\text{IX}\quad p\varepsilon 1 + N_1 \cdot k\varepsilon N_1 \cdot \supset \cdot D[2^p\,,\,2^{p-1}(2k+1)] =$$
$$= \Sigma[M(p-1\,,\,2i-1)\,C(k+i\,,\,p)\,|\,i\,,\,1\cdots p-1]\,.$$

E gli uni e gli altri si presentano insieme in alcune « tavole di somma »; costruite con la legge del triangolo aritmetico: « ogni elemento interno è somma del sovrapposto e del precedente questo nella sua orizzontale ». Per l'appunto, con tavole di somma aventi uguali a 1 tutti i numeri delle prime verticali, dai numeri $M(p-1\,,\,2i)$ del rigo p^{mo} della tabella precedente, si ottengono, al $(p+2)^{mo}$ rigo, tutti i numeri $M(p\,,\,i)$ del rigo $(p+1)^{mo}$; e le tavole:

$$\begin{array}{lllllllllllllllll}
1 & & & & & 1 & 1 & & & & & 1 & 6 & 1 & & & \\
1 & 1 & & & & 1 & 2 & 1 & & & & 1 & 7 & 7 & 1 & & \\
1 & 2 & 1 & , & & 1 & 3 & 3 & 1 & & & 1 & 8 & 14 & 8 & 1 & \\
 & & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & , & 1 & 9 & 22 & 22 & 9 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & 1 & 10 & 31 & 44 & 31 & 10\;\;1\,,
\end{array}$$

lo dimostrano per $p=1$, a 2 e a 3. La dimostrazione genarale, per induzione, è basata su una proprietà delle tavole di somma, che si può leggere nel Bertrand-Betti, *Algebra elementare* (v. eserc. 12° della pag. 199, 1862); e in virtù della quale, per es., l'elemento i^{mo} dell'ultimo rigo dell'ultima tavola è dato, per i da 0 a 7, da $C(4\,,\,i-1)\times 1 + C(4\,,\,i-2)\times 6 + C(4\,,\,i-3)\times 1$, cioè da $M(3\,,\,i)$. Come conseguenza immediata, in una stessa orizzontale, di indice p qualunque, della tabella degli M: *a*) due M equidistanti dagli estremi son sempre uguali; *b*) la somma di tutti gli $M = 2\wedge[p(p+1)/2+1]$. Si potrebbero dedurre le formule:

$$\text{X}\qquad p\varepsilon N_0 \cdot i\varepsilon 0\cdots p \cdot \supset \cdot M(p\,,\,2i) = M(p\,,\,2p-2i)\,,$$
$$\text{XI}\qquad \text{»}\quad \cdot \supset \cdot \Sigma[M(p\,,\,2i)\,|\,i\,,\,0\cdots p] = 2\wedge p(p+1)/2\,,$$

affermanti teoremi dello stesso tipo per gli M di secondo indice pari; ma esse si stabiliscono già nel corso della dimostrazione della VIII, e anche direttamente.

4. Chiudiamo con una nuova proprietà dei numeri M. Osservo che:

$$q\varepsilon 0\cdots 4 \cdot \supset \cdot M(2\,,\,q) = C(4\,,\,q)\,,$$
$$q\varepsilon 0\cdots 6 \cdot \supset \cdot M(3\,,\,q) = C(6\,,\,q) + 2^2\times 1\times C(4\,,\,q-1)\,,$$
$$q\varepsilon 0\cdots 8 \cdot \supset \cdot M(4\,,\,q) = C(8\,,\,q) + 2^2\times 7\times C(6\,,\,q-1)\,,$$
$$q\varepsilon 0\cdots 10 \cdot \supset \cdot M(5\,,\,q) = C(10\,,\,q) + 2^2\times 48\times C(8\,,\,q-1) +$$
$$+ 2^4\times 15\times C(6\,,\,q-2)\,,\ \text{ecc.};$$

ed enuncio il risultato generale. « Si definisca una funzione $N(p, q)$, di p e q, ponendo:

$$\mathrm{XII}\quad \begin{cases} N(0, 0) = 1 \\ q \varepsilon N_1 \cdot \supset \cdot N(0, q) = 0 \\ p \varepsilon N_1 \cdot q \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot N(p \cdot q) = \\ \qquad = \Sigma[2^i C(p+1-i, 2q-i) N(p-1, i) \mid i, 0 \cdots 2q] \ \mathrm{Def.}; \end{cases}$$

e si avrà la formula:

$$\mathrm{XIII}\quad p \varepsilon N_1 \cdot q \varepsilon 0 \cdots 2p \cdot \supset \cdot M(p, q) =$$
$$= \Sigma \{ 2^{2i} C(2p-2i, q-i) N(p-2, i) \mid i, 0 \cdots E[(p-1)/2] \} \text{ »}.$$

Fisica. — *Forze elettromotrici unidirezionali generate fra due punti dell'asse di un cilindro di bismuto rotante in un campo magnetico* [1]. Nota di G. C. TRABACCHI, presentata dal Corrispondente O. M. CORBINO.

1. Se si fa rotare un conduttore in un campo magnetico qualsiasi, non è possibile che fra due punti dell'asse di rotazione si determini una differenza di potenziale costante, perchè, come è noto [2], *non si possono ottenere f. e. m. costanti per virtù di movimento senza ricorrere a contatti striscianti su cerchi di raggio differente da zero.*

Se però il conduttore è costituito da bismuto, la cui resistenza muta notevolmente per azione del campo magnetico, si possono immaginare speciali configurazioni di campo e opportune forme da dare al conduttore, in modo che le periodiche variazioni di resistenza determinate durante la rotazione per azione del campo stesso abbiano come conseguenza una differenza costante di potenziale fra due punti del conduttore.

2. Consideriamo un caso abbastanza semplice: se si prende un involucro cilindrico di bismuto chiuso da due basi piane metalliche e lo si fa rotare tra i centri di dette basi in un campo magnetico avente la configurazione rappresentata dalla fig. 1, poichè in ogni momento la resistenza della porzione del cilindro compresa tra il piano *X Y* e la espansione polare *N* ha un valore superiore a tutte le rimanenti parti per il fatto che il campo a cui essa è sottoposta è più intenso che altrove, saranno realizzate le particolari condizioni a cui si accennava e per le quali si potrà

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico della R. Università di Roma.
(2) H. Poincaré, *L'Eclairage électrique*, tom. XXIII, pag. 41, 1900.