ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1918.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

Meccanica. — *Sulla determinazione teorica della forma del Geoide.* Nota del Corrisp. E. ALMANSI [1].

1. Sono oggetto di questa Nota alcune considerazioni che svolgo a complemento di quanto fu da me esposto in precedenti lavori [2].

Il problema di determinare la forma dell'intero Geoide, desumendola dai valori della gravità sulla superficie fisica della Terra, consta essenzialmente di due parti:

a) la ricerca dei valori che assume sul Geoide G la gravità g' relativa ad un sistema ideale T' limitato da G, avente lo stesso asse di rotazione e la stessa velocità angolare della Terra, e pel quale G è ancora una superficie d'equilibrio;

b) la deduzione, dai valori di g', della forma di G.

Per passare dal sistema reale T al sistema ideale T', noi dobbiamo immaginare di sopprimere le masse m che nel sistema reale si trovano fuori del Geoide, e di sostituirle con masse m' situate entro il Geoide, e il cui potenziale, su questa superficie, sia uguale al potenziale delle masse m.

Nell'ordine di approssimazione al quale ci atteniamo, i termini di correzione a cui dà origine il passaggio dall'uno all'altro sistema, si possono

[1] Pervenuta all'Accademia il 22 giugno 1918.

[2] *Sulla forma dello sferoide terrestre dedotta dalle misure di gravità*, Rendic. Acc. Lincei, a. 1917, 1° sem., fasc. 6° (Nota I); *Sulla determinazione della forma del Geoide*, ibid., a. 1917, 2° sem., fasc. 5° (Nota II).

calcolare come se il Geoide fosse sferico. Ad una massa elementare esterna dm potremo allora immaginare sostituita una massa interna dm', attigua al punto P' coniugato armonico del punto P a cui è attigua la dm. Se O è il centro, R il raggio medio della Terra, posto $OP = R + h$, $OP' = R - h'$, dovrà aversi

$$(R + h)(R - h') = R^2,$$

da cui

$$h' = \frac{h}{1 + \frac{h}{R}}.$$

Fra le due masse corrispondenti deve poi intercedere la relazione

$$\frac{dm'}{dm} = \frac{h'}{h}.$$

Non commetteremo, per altro, errori apprezzabili, se nei termini piccolissimi (del 2° ordine) che si tratta di calcolare, trascureremo $\frac{h}{R}$ rispetto all'unità, e riterremo perciò h' uguale ad h, dm' uguale a dm. Il passaggio dal sistema T al sistema T' si presenta allora come un semplice *rovesciamento* delle masse esterne.

2. È noto che l'Helmert, a fine di rendere legittimo, anche sul Geoide, lo sviluppo in serie del potenziale per funzioni sferiche, considera una superficie, che denoterò con S_0, parallela al Geoide, situata nel suo interno, e che ne dista di αR, α essendo lo schiacciamento della Terra; e su questa superficie immagina *condensate*, mediante spostamenti verticali, le masse sovrastanti [1].

Ora è da osservare che il procedimento proposto da Helmert non può ritenersi atto alla costruzione del sistema T', nè per conseguenza della gravità g', se si vuole che dai valori di g' sia deducibile, almeno teoricamente, e coll'approssimazione richiesta, la forma del Geoide.

Un esempio numerico giustificherà l'asserto.

Consideriamo sul Geoide una massa cilindrica m, di raggio a, di altezza h, di densità $\frac{1}{2}\varrho_0$, ϱ_0 essendo la densità media della Terra. Siano P e G i centri delle basi superiore ed inferiore. In corrispondenza della massa m il Geoide potremo ritenerlo piano.

Diciamo q, q', q_0 le attrazioni esercitate nel punto P dalla massa m, dalla stessa massa rovesciata, e dalla massa condensata sulla superficie S_0. Le differenze $q - q'$, $q - q_0$ ci daranno la diminuzione che subisce la gra-

[1] *Die mathematischen und physikalischen Theorieen der höheren Geodäsie*, vol. II, cap. 2°.

vità nel punto P, rispettivamente per il rovesciamento della massa m, e per la sua condensazione sulla superficie S_0. Poniamo

$$g_0 = \frac{4}{3}\pi f \varrho_0 R,$$

ove f denota la costante della gravitazione, quindi g_0 un valore approssimato della gravità; e inoltre

$$\varepsilon = \frac{q - q'}{g_0} \quad , \quad \varepsilon_0 = \frac{q - q_0}{g_0}.$$

Potremo supporre uguale ad 1 la costante f che figura nei numeratori e nei denominatori, e pure uguale ad 1 la densità del cilindro, purchè si supponga $\varrho_0 = 2$; onde avremo $g_0 = \frac{8}{3}\pi R$,

$$\varepsilon = \frac{3}{4}\frac{q - q'}{2\pi R} \quad , \quad \varepsilon_0 = \frac{3}{4}\frac{q - q_0}{2\pi R}.$$

Si ottengono le espressioni di q e di q' ricordando che un cilindro di raggio α, di altezza h, di densità 1, esercita sopra un punto esterno che appartenga al suo asse e disti di z dalla base più vicina, l'attrazione

$$2\pi \left\{ h + \sqrt{a^2 + z^2} - \sqrt{a^2 + (z + h)^2} \right\}.$$

Per avere l'espressione di q_0 si ricorderà che un disco circolare omogeneo, di raggio a, di massa $\pi a^2 h$, esercita sopra un punto dell'asse che ne disti di z, l'attrazione

$$2\pi h \left\{ 1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right\}.$$

Assegnamo dei valori numerici ad a ed h. Sia $a = 5km$, $h = 0{,}5$. Sarà, rispettivamente per i due cilindri e per il disco, $z = 0$, $z = 0{,}5$, $z = 21{,}9$. Troveremo

$$\varepsilon = 0{,}0000058 \quad , \quad \varepsilon_0 = 0{,}0000544.$$

La differenza $\varepsilon_0 - \varepsilon = 0{,}0000486$ è assai maggiore del quadrato della costante $\gamma = 0{,}005302$ che figura nella espressione della gravità in funzione della latitudine, e che abbiamo assunta come una quantità del primo ordine (Nota I, § 1). Dovremo quindi considerare $\varepsilon_0 - \varepsilon$ come una quantità del *secondo ordine*.

Nel calcolo della gravità ideale il rovesciamento delle masse esterne non potrebbe, pertanto, venir sostituito colla condensazione immaginata da Helmert. Il calcolo precedente mostra che lo spostamento delle masse più vicine al punto P può dar luogo, se eseguito con questo metodo, ad errori non trascurabili; nè v'è motivo per ritenere che tali errori debbano essere costantemente compensati dagli spostamenti delle altre masse.

3. Le ricerche aventi attinenza colla forma del Geoide portano dunque, allorchè si voglia tener conto delle quantità del secondo ordine, a considerare simultaneamente il sistema reale T, ed un sistema ideale T' ottenuto mediante il rovesciamento delle masse situate fuori del Geoide. Ad un punto qualunque dello spazio corrisponderà allora un valore della gravità reale g, ed un valore della gravità ideale g', una direzione della verticale reale n, ed una direzione della gravità ideale n', ecc. Si avranno pure da considerare due sistemi di superficie epuipotenziali: le superficie equipotenziali *reali* E, e le superficie equipotenziali *ideali* E'; e fra questi due sistemi di superficie si potrà stabilire una corrispondenza, ritenendo corrispondenti una E ed una E' quando i rispettivi potenziali hanno sulle due superficie valori uguali. Il Geoide corrisponderà a se stesso.

Fuori di G, le superficie E', che non sono direttamente influenzate dalle masse esterne m, presenteranno una maggiore regolarità delle E, e si discosteranno meno di queste dalla forma di G.

In corrispondenza di una regione limitata A della superficie della Terra, la forma delle E' si potrà determinare con sufficiente esattezza, quando siano determinate, in un numero abbastanza grande di punti P di A, le direzioni delle normali alle E', ossia delle verticali ideali n'. Per passare, in un punto P, dalla verticale reale n alla verticale ideale n', si dovrà calcolare la differenza (geometrica) fra le componenti orizzontali delle attrazioni esercitate nel punto P dalle masse m e dalle masse m'.

4. Torniamo ai valori della gravità g' sul Geoide.

Se P è un punto della superficie fisica della Terra, G il punto d'incontro col Geoide della normale a questa superficie condotta per P, g il valore della gravità reale nel punto P, g' il valore della gravità ideale nel punto G, si ha

$$g' = (1 + k)\, g - \delta, \tag{1}$$

dove δ rappresenta la differenza fra le componenti secondo n delle attrazioni esercitate in P dalle masse m e dalle masse m', quindi $g - \delta$ (con un errore trascurabile) la gravità ideale nel punto P; kg l'incremento che subisce la gravità ideale quando si passa dal punto P della superficie della Terra, al punto G del Geoide (Nota II, § 2).

Sui valori di δ mi limito qui a riportare alcuni risultati.

Diciamo σ quella parte del Geoide che è situata nell'interno della superficie fisica della Terra, $d\sigma$ un suo elemento. Sia μ la massa compresa fra $d\sigma$, la superficie della Terra, e il cono che ha per vertice il centro O del Geoide, per direttrice il contorno di $d\sigma$; ϱ il rapporto fra la densità media di μ e la densità media della Terra; $F\varrho\,d\sigma$ l'elemento di δ che ha origine dal rovesciamento della massa μ. Avremo allora

$$\delta = \int_\sigma F\varrho\,d\sigma\,.$$

Sia L la distanza dell'elemento $d\sigma$ dal punto G, h l'altezza della superficie della Terra sul Geoide, in corrispondenza di $d\sigma$; denotiamo ora con h_0 l'altezza GP. Sarà

$$F = F(h_0, h, L)\,.$$

Si trova che la funzione F è positiva soltanto in una piccola regione σ_0 di σ, che contiene il punto G. Con grande appróssimazione la regione σ_0 si può determinare nel modo seguente. Consideriamo un ellissoide di rivoluzione avente per centro il punto G, per asse la normale GP. Siano $1{,}4\,h_0$ ed $1{,}6\,h_0$ i suoi semi-assi equatoriale e polare. Denoti l l'intersezione dell'ellissoide colla superficie fisica della Terra, l_0 la proiezione di l sul Geoide. La regione σ_0 è quella parte di σ che è situata nell'interno della linea l_0.

Le masse μ sovrastanti a σ_0 portano dunque, sul valore di δ, un contributo positivo, tutte le altre un contributo negativo; ma δ, in generale, risulta positivo.

La parte di δ dovuta alle masse μ la cui altezza è inferiore a 1000 m. e la cui distanza da P supera 120 km., non arriva mai a $10^{-6}\,g_0$.

In corrispondenza di un altipiano di grande estensione il valore di δ è sempre molto piccolo. I massimi valori di δ si hanno allorchè le masse esterne, in prossimità di P, presentano una forma che si avvicina a quella di un cono col vertice in P, ed è grande l'altezza del cono, ma piccolo l'angolo al vertice.

Una parte, d'altronde piccolissima, del termine δ, è dovuta alla presenza della massa atmosferica.

5. Esaminiamo l'altro termine kg che interviene nella formula (1). Si ha (Nota II, § 2)

$$k = k' + k'^2\,, \tag{2}$$

$$k' = \frac{\left(\frac{\partial U'}{\partial n}\right)_G - \left(\frac{\partial U'}{\partial n}\right)_P}{\left(\frac{\partial U'}{\partial n}\right)_G}\,, \tag{3}$$

ove U' è il potenziale del sistema T', n la direzione PG.

Riferiamoci ad una terna di assi ortogonali (x, y, z), assumendo il punto G come origine, la retta GP come asse delle z. Su questa retta sarà $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial z}$; quindi, per la formula (3),

$$k' = \frac{\left(\frac{\partial U'}{\partial z}\right)_P - \left(\frac{\partial U'}{\partial z}\right)_G}{-\left(\frac{\partial U'}{\partial z}\right)_G} . \tag{4}$$

Osserviamo che, essendo tutta la massa del sistema T' contenuta entro il Geoide, nello spazio esterno la funzione U' è regolare, e detta ω la velocità angolare di rotazione della Terra, verifica l'equazione

$$\frac{\partial^2 U'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U'}{\partial z^2} = 2\omega^2 . \tag{5}$$

Ammettiamo che $\frac{\partial U'}{\partial z}$ sia sviluppabile in serie di potenze rispetto a z. Nel punto P è $z = h$; onde arrestandoci al termine in h^2 avremo

$$\left(\frac{\partial U'}{\partial z}\right)_P - \left(\frac{\partial U'}{\partial z}\right)_G = \left(\frac{\partial^2 U'}{\partial z^2}\right)_G \cdot h + \left(\frac{\partial^3 U'}{\partial z^3}\right)_G \cdot \frac{h^2}{2} .$$

Nel secondo membro le derivate di U' s'intendono prese sulla faccia *esterna* del Geoide.

Sostituendo nella formula (4) otteniamo, tolti gl'indici G,

$$k' = \frac{\frac{\partial^2 U'}{\partial z^2}}{-\frac{\partial U'}{\partial z}} \cdot h + \frac{\frac{\partial^3 U'}{\partial z^3}}{-\frac{\partial U'}{\partial z}} \cdot \frac{h^2}{2} . \tag{6}$$

Dall'essere U' costante sul Geoide si ricava

$$\frac{\partial^2 U'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U'}{\partial y^2} = \frac{2}{R} \frac{\partial U'}{\partial z} ,$$

ove $\frac{2}{R}$ denota la curvatura media del Geoide nel punto G. In virtù della equazione (5) sarà

$$\frac{\partial^2 U'}{\partial z^2} = -\frac{2}{R} \frac{\partial U'}{\partial z} + 2\omega^2 = -\frac{2}{R} \frac{\partial U'}{\partial z} (1 + \lambda) ,$$

ove

$$\lambda = \frac{R\omega^2}{-\frac{\partial U'}{\partial z}} = \frac{R\omega^2}{g'} .$$

Poniamo

$$\nu = R^2 \frac{\frac{\partial^3 U'}{\partial z^3}}{\frac{\partial U'}{\partial z}}.$$

La formula (6) potrà scriversi

$$k' = (1+\lambda)\frac{2h}{R} - \frac{1}{2}\nu\frac{h^2}{R^2}.$$

A λ potremo attribuire il valore 0,0035, a ν il valore 6 (come se il Geoide fosse sferico, ed $\omega = 0$). Avremo allora

$$k' = 2{,}007\frac{h}{R} - 3\frac{h^2}{R^2}.$$

E passando a k mediante la formola (2), a meno di termini trascurabili,

$$k = 2{,}007\frac{h}{R} + \frac{h^2}{R^2}.$$

Nel primo termine non si può attribuire ad R un valore costante su tutto il Geoide. Si otterrà, con approssimazione sufficiente, l'espressione di R, considerando il Geoide come un ellissoide.

Il termine $\frac{h^2}{R^2}$ è sempre piccolissimo. Ma i massimi valori di $\frac{h}{R}$ sono da ritenersi piccoli del primo ordine; e perciò, nella trattazione teorica del problema, i termini come $\frac{h^2}{R^2}$ non sono trascurabili.

6. La conoscenza di g' in un numero sufficientemente grande di punti del Geoide, e di una dimensione di questa superficie, porterebbe a conoscere con molta esattezza il valore della massa terrestre.

Noi abbiamo considerati tre sistemi: il sistema reale T, il sistema ideale T′, ed il sistema T″ (Nota II, § 4) limitato da uno sferoide regolare S. Siano M, M′, M″ le masse dei tre sistemi. Poichè nel passaggio da T a T′ la massa non varia, sarà $M = M'$, quindi

$$M = M'' + (M' - M'').$$

La massa M″ del sistema T″ si deduce dalla espressione del suo potenziale newtoniano, e precisamente dal coefficiente di $\frac{1}{r}$ (v. Nota I).

La massa $M' - M''$ ci è poi data dalla funzione $g_0 u$, differenza fra i potenziali V′, V″ dei due sistemi T′, T″ (Nota II, § 5).

7. La conoscenza di g' fornirebbe anche una indicazione sulla distribuzione della massa terrestre nell'interno del Geoide.

Noi possiamo infatti, sul Geoide G e nello spazio esterno, considerare $g_0 u$ come il potenziale newtoniano di masse m_1 distribuite in modo irregolare nel sistema T'. Rappresentando convenzionalmente queste masse mediante una distribuzione di densità D sulla superficie G, e considerando il Geoide come una sfera di raggio R, si avrà in ogni suo punto

$$\mathrm{D} = -\frac{g_0}{4\pi f \mathrm{R}}\left(u + 2\mathrm{R}\frac{\partial u}{\partial r}\right). \tag{7}$$

Per passare al sistema reale T dovremo supporre di riportare fuori del Geoide le masse m' (masse m rovesciate). Le irregolarità nella distribuzione della massa terrestre sono dunque rappresentate, entro il Geoide, dalle masse $m_1 - m'$.

Poniamo $g_0 = \frac{4}{3}\pi f \varrho_0 \mathrm{R}$ (nelle Note precedenti è denotata con g_0 la gravità sull'equatore dello sferoide S, ma nei termini come $g_0 u$ i due valori possiamo ritenerli uguali); e inoltre $\mathrm{D} = h_1 \varrho_1$, ove h_1 denoti una lunghezza, quindi ϱ_1 una densità (di volume), alla quale assegneremo un valore determinato. La formula (7) darà

$$h_1 = -\frac{1}{3}\frac{\varrho_0}{\varrho_1}\left(u + 2\mathrm{R}\frac{\partial u}{\partial u}\right).$$

Si ha poi sul Geoide (Nota I, §§ 5 e 6)

$$2u + \mathrm{R}\frac{\partial u}{\partial r} = -\mathrm{R}\frac{\Delta g}{g_0} + 2c \quad , \quad u = s + c ,$$

ove Δg rappresenta la differenza fra la gravità g' e la gravità g'' relativa al sistema T'' limitato dallo sferoide S, s lo scostamento del Geoide dallo sferoide, c una costante. Eliminando da queste formule u e $\frac{\partial u}{\partial r}$, e risolvendo rispetto ad h_1, si ottiene, a meno di una costante addittiva che corrisponderà ad una massa distribuita regolarmente, e potrà per conseguenza tralasciarsi,

$$h_1 = \frac{\varrho_0}{\varrho_1}\left(\frac{2}{3}\frac{\Delta g}{g_0}\mathrm{R} + s\right),$$

nella qual formula, dovuta ad Helmert, si ha dunque da intendere che il termine Δg rappresenti le anomalie della gravità ideale, come è stata qui definita.