ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

e che

$$dx_2 = dx_3 = 0 \quad ; \quad dx_1 = dx_3 = 0 \,;$$

$$dx_1 + (\delta x_1 - \alpha_1 x_2)\, dx_3 = 0 \quad , \quad dx_2 + (\delta x_2 + \alpha_2 x_1)\, dx_3 = 0$$

sono le equazioni delle congruenze principali di 2ª specie; e

$$\sin\theta\, dx_1 + \cos\theta\, dx_2 = 0 \ , \ dx_3 = 0 \,;$$

$$\cos\theta\, dx_1 - \sin\theta\, dx_2 = 0 \ , \ dx_3 = 0 \,;$$

$$dx_1 + (\delta x_1 - \alpha_1 x_2)\, dx_3 = 0 \quad . \quad dx_2 + (\delta x_2 + \alpha_2 x_1)\, \delta x_3 = 0$$

quelle delle congruenze principali di 1ª specie.

Matematica. — *Fondamenti di geometria proiettivo-differenziale di una superficie* [1]. Nota II del Corrisp. GUIDO FUBINI [2].

6. STUDIO PROIETTIVO DI S. — Dal nostro punto di vista è naturalmente opportuno porre $g = \varphi_2$, che è invariante per collineazioni, ed usare coordinate normali. Si trova, essendo $F_2 = \varphi_2$, ecc., e indicato con S_p il valore corrispondente di S

$$S_p = \varrho^4 S_m = N^2 \sqrt{K}\, S_m \tag{24}$$

$$\begin{aligned} S_p = &- d[\sqrt{\nabla}\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u)]\,\varphi_2 + \\ &+ \sqrt{\nabla}\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u)\,(\tfrac{3}{2}\,d\varphi_2 + \varphi_3) + (x\,,\mathrm{D}x\,,\mathrm{D}_2 x\,,\mathrm{D}_3 x) \end{aligned} \tag{25}$$

ove *i simboli* δ^2, D *sono relativi alla* φ_2 [e non all'elemento lineare di Gauss, come in $(22)_{bis}$]. Le (23), (24) *dànno il significato metrico di* S_p. Una superficie essendo completamente determinata (a meno di collineazioni) da S_p, si trae da (25): *Una superficie è completamente determinata nel gruppo proiettivo dalle tre forme* φ_2, φ_3, $(x\,.\,\mathrm{D}x\,,\mathrm{D}_2 x\,.\,\mathrm{D}_3 x)$ (la seconda delle quali, come risulterà da quanto segue, è perfettamente determinata dalle altre due). Dividendo covariantemente la terza per la prima si abbia:

$(x\,,\mathrm{D}x\,,\mathrm{D}_2 x\,,\mathrm{D}_3 x) = \overline{\psi}_6 + \overline{\psi}_4\,\varphi_2 + \overline{\psi}_2\,\varphi_2^2 + \overline{\psi}_0\,\varphi_2^3$ ($\overline{\psi}_n$ coniugate a φ_2).

Proveremo che: *La forma* $\overline{\psi}_0$ *è identicamente nulla; le forme* $\overline{\psi}_4$, $\overline{\psi}_6$ *sono completamente determinate dalle* φ_2, φ_3 (anzi $\overline{\psi}_6$ è il prodotto di φ_3 per il suo covariante cubico $\overline{\varphi}_3$). Ne risulterà così provato:

Date le forme φ_2, φ_3, *una superficie è completamente determinata nel gruppo proiettivo dalla sola forma quadratica* $\overline{\psi}_2$, *anch'essa coniu-*

[1] Cfr. la Nota I a pag. 11 di questi Rendiconti.

[2] Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1918.

gata della φ_2. Dato il carattere intrinseco dei nostri studî, noi potremo, per provare il nostro teorema, scegliere ad arbitrio le u, v, e p. es. adottare *coordinate assintotiche.*

Scriviamo anzitutto le equazioni, cui soddisfano in tale caso le *coordinate normali*. Il modo più rapido (ma *non* proiettivo) di ottenerle è quello di servirsi delle equazioni

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} = \alpha\frac{\partial\theta}{\partial u} + \beta\frac{\partial\theta}{\partial v} \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \gamma\frac{\partial\theta}{\partial u} + \varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial v}$$

$$\left(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon = \text{valori di } \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} \text{ per l'elemento lineare}\right)$$

a cui soddisfano le coordinate cartesiane θ nel caso che u, v siano assintotiche. Sarà (cfr. A):

$$\varphi_2 = 2\beta\gamma\, du\, dv \quad \text{e quindi} \quad N = \frac{\beta\gamma}{D'} \quad ; \quad \varphi_3 = 2\beta\gamma(\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3).$$

Dalla $\varrho^2 = N\sqrt[4]{K}$, dalle equazioni di Gauss e Codazzi, si trae $2\frac{\varrho_u}{\varrho} = \frac{\partial}{\partial u}\log(\beta\gamma) - \alpha$ e $2\frac{\varrho_v}{\varrho} = \frac{\partial}{\partial v}\log(\beta\gamma) - \varepsilon$. Quindi ϱ, e $\varrho\theta$, cioè le coordinate *normali* soddisfano alle

$$x_{11} = \beta x_2 + nx \qquad x_{22} = \gamma x_1 + \nu x \tag{26}$$

(ove x_{rs} sono derivate *covarianti*) e dove:

$$\begin{aligned}2n = \left[\frac{\partial^2}{\partial u^2}\log\beta\gamma - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\log\beta\gamma}{\partial u}\right)^2\right] - \\ - \left(\alpha_u - \frac{1}{2}\alpha^2\right) + (\beta_v + \beta_u) - \beta\frac{\partial\log\beta^2\gamma}{\partial v}\end{aligned} \tag{27}$$

$(27)_{bis}$ ν si deduce da n scambiando β con γ, u con v, α con ε.

Derivando *covariantemente* le (26) si deducono le x, Dx, D_2x, D_3x come *combinazioni lineari* delle x, x_1, x_2, x_{12}. Quindi (x, Dx, D_2x, D_3x) vale il prodotto di $(x, x_1, x_2, x_{12}) = \beta^2\gamma^2$ per il determinante dei coefficienti di queste combinazioni lineari. Si trova così:

$$\begin{aligned}(x, Dx, D_2x, D_3x) = \varphi_3\overline{\varphi}_3 + 2\beta\gamma\, du\, dv \times \\ \times\left[\beta^2\gamma\frac{\partial\log\beta\gamma^2}{\partial u}du^4 - \beta\gamma^2\frac{\partial\log\beta^2\gamma}{\partial v}dv^4\right] - \frac{1}{2}(2\beta\gamma\, du\, dv)^2\,\overline{\psi}_2.\end{aligned} \tag{28}$$

ove

$$\psi_2 = \left(n + \frac{3}{2}\beta\frac{\partial\log\beta^2\gamma}{\partial v}\right)du^2 + \left(\nu + \frac{3}{2}\gamma\frac{\partial\log\beta\gamma^2}{\partial u}\right)dv^2.$$

Mancando nella penultima formola un termine $du^3\,dv^3$, è $\overline{\psi}_0 = 0$. Il coefficiente $\overline{\psi}_4$ di $\varphi_2 = 2\beta\gamma\, du\, dv$ si deduce col metodo dato al § 2 dalla forma φ_4, dedotta [cfr. la (15)] dalle φ_2, φ_3; ed è perciò determinato dalle φ_2, φ_3, come avevamo enunciato. In altre parole $\overline{\psi}_4$ si deduce dalle φ_2, $\overline{\varphi}_3$ come la φ_4 si deduce da φ_2, φ_3 [essendo $\overline{\varphi}_3$ il covariante cubico di φ_3].

Date le forme φ_2, φ_3 sono determinate le g_2, Γ_2 (§ 4); si può quindi, invece di dare la forma ψ_2, dare una qualsiasi delle forme $f_2 = \psi_2 - \frac{3}{2} g_2$ e $t_2 = 2f_2 - \Gamma_2$, che in coordinate assintotiche valgono

$$(29)\qquad f_2 = \psi_2 - \tfrac{3}{2} g_2 = n\, du^2 + \nu\, dv^2$$

$$(30)\qquad t_2 = 2f_2 - \Gamma_2 = m\, du^2 + \mu\, dv^2$$

ove

$$(31)\qquad m = \frac{\partial^2 \log \frac{1}{\gamma}}{\partial u^2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \log \frac{1}{\gamma}}{\partial u}\right]^2 - (\alpha_u - \tfrac{1}{2}\alpha^2) + (\beta_v + \beta\varepsilon)$$

$(31)_{bis}$ μ si deduce da m, scambiando β con γ, α con ε, u con v.

7. Come si determina una superficie, per cui sono date le forme φ_2, φ_3, ψ_2? (Invece di ψ_2 è indifferente dare f_2 oppure t_2). — Si può, p. es., costruire (§ 6) la forma S, risolvere la $S = 0$; ottenuta così l'equazione delle sezioni piane, si può (cfr. T) risalire alle equazioni parametriche della superficie.

Ma, molto più semplicemente, si possono cercare direttamente le coordinate *normali* di un punto della superficie. Le equazioni (26) dicono che, almeno in coordinate assintotiche,

$$D_2 x = P_2^x + x f_2 + 2x_{12}\, du\, dv$$

cioè che $D_2 x - P_2^x - x f_2$ *è proporzionale a* φ_2 *(ossia che* $P_2^x + x f_2$ *è il resto ottenuto dividendo covariantemente* D_2^x *per* φ_2*)*. Questa proprietà è *intrinseca*, e, essendo stata provata in coordinate assintotiche, vale *in generale e dà in ogni caso le equazioni differenziali per le coordinate normali.* (Nel caso metrico $D_2 x$ è proporzionale ad F_2, se x è una coordinata cartesiana, e D_2 è calcolato rispetto all'elemento lineare). Vi è dunque una profonda *analogia* tra caso *metrico* e caso *proiettivo*.

8. Condizioni di integrabilità. — Per trovare queste, che dànno *tutte* le relazioni che devono intercedere tra le nostre forme φ_2, φ_3, f_2 (di cui φ_3 ed f_2 *coniugate* a φ_2), si scrivono le condizioni di integrabilità delle (26). Si trovano essere le

$$(32)\qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 \log \beta\gamma}{\partial u^2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u}\right]^2\right) + 2\beta\gamma_u + \beta_u\gamma = \frac{\partial}{\partial v}\left[2n + \beta\, \frac{\partial \log(\beta^2\gamma)}{\partial v}\right]$$

$(32)_{bis}$ l'equazione ottenuta scambiando β con γ, n con ν, u con v.

Tenuto conto di queste, l'ultima condizione di integrabilità si può scrivere:

$$2\gamma'_u m + \gamma m'_u = 2\beta'_v \mu + \beta \mu'_v . \tag{33}$$

Le (32) e $(32)_{bis}$ provano in coordinate assintotiche il seguente teorema, che, essendo di carattere intrinseco, vale dunque in generale (cfr. le notazioni del § 4):

Prima condizione di integrabilità è che $2\delta(\psi_2 - g_2) - g_3 - \frac{1}{2}\varphi_2\varphi_1$ *sia coniugata di* φ_2.

La (33) prova poi che:

Seconda e ultima condizione di integrabilità è che la forma R_t *dedotta da* t_2 *col metodo del* § 4 *sia proporzionale a* φ_3.

9. Superficie proiettivamente applicabili. — Per studiare queste classi di superficie, possiamo p. es. usare coordinate assintotiche; e cercare le superficie per cui

$$\varphi_2 = 2\beta\gamma\, du\, dv \qquad \varphi_3 = 2\beta\gamma(\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3)$$

sono forme prefissate *a priori*. Assumiamo come incognite (anzichè le n, ν) le

$$\mathrm{L} = -2n - \beta \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} + \frac{\partial^2}{\partial u^2} \log \beta\gamma - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u}\right)^2 = \alpha_u - \frac{1}{2}\alpha^2 - \beta_v - \beta\varepsilon \tag{34}$$

$$\mathrm{M} = \varepsilon_v - \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \gamma_u - \gamma\alpha . \tag{34$_{bis}$}$$

Le condizioni di integrabilità diventano:

$$\mathrm{L}'_v = -(2\beta\gamma_u + \gamma_u\beta) \qquad \mathrm{M}'_u = -(2\gamma\beta_v + \gamma_v\beta) \tag{35}$$

$$\beta\,\mathrm{M}_v + 2\beta_v\,\mathrm{M} + \beta_{vvv} = \gamma\,\mathrm{L}_u + 2\gamma_u\,\mathrm{L} + \gamma_{uuu} . \tag{35$_{bis}$}$$

Per studiare un tale sistema, si possono (Bianchi L.) assumere come nuove incognite le

$$\mathrm{P} = \mathrm{L}'_u \qquad \mathrm{Q} = \mathrm{M}'_v$$

cosicchè $(35)_{bis}$ è un'equazione lineare nelle quattro incognite L, M, P, Q. Come condizione di integrabilità si trova un'altra equazione dello stesso tipo; da cui, derivando rispetto u oppure rispetto v, se ne deducono altre due. I calcoli si complicano in modo tale, che non mi è riuscito di dominarli. Ci si può chiedere quando le forme φ_2, φ_3 non determinano completamente la superficie corrispondente, cioè quando questa si può deformare proiettivamente in modo effettivo. In tale caso le (35) e $(35)_{bis}$ ammettono almeno due sistemi di soluzioni $\mathrm{L} = \mathrm{L}_r$, $\mathrm{M} = \mathrm{M}_r$ per $r = 1, 2$. La $\mathrm{U} = \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2$

sarà una funzione della sola u, la $V = M_1 - M_2$ sarà una funzione della sola v; entrambe devono soddisfare all'unica equazione

$$\beta V' + 2\beta_v V = \gamma U' + 2\gamma_u U. \tag{36}$$

Senza diminuire la generalità si possono cambiare i parametri u, v in guisa che $U = 0$, oppure 1, oppure u^2 e $V = 0$ oppure 1, oppure v^2; e ricavarne i possibili valori di β, γ. (Se p. es. $U = u^2, V = v^2$, sarebbe $\beta = \frac{v}{u}\frac{\partial\sigma}{\partial u}$ $\gamma = \frac{u}{v}\frac{\partial\sigma}{\partial v}$ con σ funzione arbitraria di u, v). Varrebbe forse la pena di studiare le (35) e $(35)_{bis}$ almeno per questi valori di β, γ; gli altri eventuali sistemi di valori di β, γ, per cui tali equazioni fossero compatibili, e ammettessero perciò *una sola* soluzione L, M corrisponderebbero a superficie non deformabili proiettivamente, e determinate pertanto completamente (a meno di una collineazione) dalle sole forme φ_2, φ_3.

10. Cenno di altre ricerche. — Si potrebbero svolgere considerazioni duali, definendo le *coordinate normali* ξ, η, ζ, τ di piano tangente. Queste si ottengono dalle coordinate cartesiane (coseni diretti X, Y, Z, e $-W$, ove W è la distanza dall'origine) moltiplicandole per ϱ_1 ove $\varrho_1^2 = \frac{N}{\sqrt[4]{K}} = \frac{\varrho^2}{\sqrt{K}}$.

Esse soddisfano alle (26) ove si lascino *affatto inalterati* i valori (27) di n, ν, ma si cambii il segno di β, γ. Si trova $\Sigma \xi d^2 x = \varphi_2$; si trova che le $\xi, \eta, \ldots$ sono uguali ai minori di (x, x_u, x_v) divisi per $\sqrt{\nabla}$. Si ha insomma la più completa analogia col caso metrico.

Assunta la forma φ_2 a definire una geometria metrica, si può estendere la teoria delle geodetiche, della curvatura e torsione geodetica. Lo studio dell'inviluppo dei piani osculatori in un punto A della superficie alle geodetiche (per tale metrica) uscenti da A porta in modo molteplice alla generalizzazione di normali, di linee di curvatura ecc.

Si può definire un poliedro generalizzazione del triedro mobile di Darboux e Ribaucour, da cui pure è partito il Cesàro per la sua geometria intrinseca ecc. Riassumerò questi studii nella Nota cit. in corso di stampa negli Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino.

In un'altra Memoria in corso di stampa negli Annali di Matematica si generalizzano queste ricerche, si studiano le congruenze w, si estendono a questo campo le applicazioni geometriche dei gruppi di Lie, ecc.