ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI
1918

Meccanica. — *Le formule del Cauchy e i fluidi viscosi.* Nota di UMBERTO CRUDELI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA [1].

I. In un articolo sull'idrodinamica, comparso nella Revue des Sciences [2], Maurice Lévy si domandava se l'esistenza del potenziale di accelerazione, sufficiente per la validità dei teoremi fondamentali di Helmholtz sui filetti vorticosi, fosse anche necessaria per la medesima validità. La risposta fu affermativa [3].

[1] Pervenuta all'Accademia il 10 luglio 1918.

[2] *Revue générale des Sciences pures et appliquées*, 1890, pag. 724. L'articolo in questione trovasi citato anche nel *Traité de Mécanique rationelle* di Appell (1909, vol. III, pag. 336).

[3] Per mostrarlo, qualora si volessero adottare procedimenti analoghi a quelli usati in note questioni d'idrodinamica da Cauchy e da Kirchhoff, si potrebbe procedere nel modo che qui appresso diremo, dopo avere premesso la seguente osservazione.

Si supponga che sussistano i teoremi fondamentali di Helmholtz. Rappresentiamo con

$$\frac{da}{\xi_0} = \frac{db}{\eta_0} = \frac{dc}{\zeta_0} \tag{α_0}$$

e con

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta} \tag{α}$$

le equazioni differenziali delle linee vorticose rispettivamente nell'istante iniziale t_0 e nel generico istante t, intendendo che ξ_0, η_0, ζ_0 e ξ, η, ζ rappresentino le componenti del vortice rispettivamente nell'istante t_0 e nell'istante t. Siano, inoltre, l_0 e σ_0 rispettivamente la lunghezza e la sezione retta di un *elemento* di filetto vorticoso nell'istante t_0 ed l e σ quelle corrispondenti nell'istante t. Infine, siano in corrispondenza del medesimo elemento, Ω_0 la grandezza del vortice nell'istante t_0 ed Ω quella nell'istante t. Avremo $\sigma_0 \Omega_0 = \sigma \Omega$. Ma, denotando con λ_0 il comune valore dei rapporti che figurano nelle (α_0) e con λ quello corrispondente dei rapporti che figurano nelle (α), potremo scrivere $l_0 = \lambda_0 \Omega_0$, $l = \lambda \Omega$. Quindi avremo $\lambda_0 \sigma l = \lambda \sigma_0 l_0$. E, tenendo presente che $\sigma_0 l_0 = \sigma l \mathrm{D}$ (dove D rappresenta il ben noto determinante funzionale) sarà

$$\lambda_0 = \lambda \mathrm{D}\,. \tag{β}$$

Ora, osservando che

$$dx = \lambda\xi \quad , \quad dy = \lambda\eta \quad , \quad dz = \lambda\zeta\,,$$

cioè

$$\frac{\partial x}{\partial a}\,da + \frac{\partial x}{\partial b}\,db + \frac{\partial x}{\partial c}\,dc = \lambda\xi\,,\ \text{etc.},$$

e che $da = \lambda_0 \xi_0$, $db = \lambda_0 \eta_0$, $dc = \lambda_0 \zeta_0$, si perviene, ricordando, infine, la (β), alle

Noi osserveremo che, più generalmente, l'esistenza del potenziale di accelerazione, è necessaria e sufficiente per la validità delle formule del Cauchy

$$
(1) \qquad \left\{
\begin{aligned}
D\xi &= \frac{\partial x}{\partial a}\xi_0 + \frac{\partial x}{\partial b}\eta_0 + \frac{\partial x}{\partial c}\zeta_0 \\
D\eta &= \frac{\partial y}{\partial a}\xi_0 + \frac{\partial y}{\partial b}\eta_0 + \frac{\partial y}{\partial c}\zeta_0 \\
D\zeta &= \frac{\partial z}{\partial a}\xi_0 + \frac{\partial z}{\partial b}\eta_0 + \frac{\partial z}{\partial c}\zeta_0 ,
\end{aligned}
\right.
$$

dove ξ_0, η_0, ζ_0 e ξ, η, ζ rappresentano le componenti del vortice, inerente ad una medesima particella del mezzo, rispettivamente nell'istante t_0 e nell'istante t; e dove D rappresenta il ben noto determinante funzionale.

Infatti, che sia sufficiente resulta dall'osservare che, qualora si abbia

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad \text{e le due analoghe,}$$

potranno applicarsi i noti procedimenti di Cauchy e di Kirchhoff; e che sia necessaria può dimostrarsi come segue. Qualora sussistano le (1), ricavando da esse ξ_0, η_0, ζ_0 e poi eseguendo operazioni di tipo noto, si può pervenire alle relazioni

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c} - \frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c} - \frac{\partial v}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial w}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}\right) = 0, \text{ etc.},$$

dove i simboli hanno noti significati. Avremo, dunque, allora

$$(2) \quad \frac{\partial u'}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c} - \frac{\partial u'}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial v'}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c} - \frac{\partial v'}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial w'}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial w'}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b} = 0, \text{ etc.},$$

avendo denotato con u', v', w' rispettivamente le $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$.

---

formule del Cauchy

$$\frac{\partial x}{\partial a}\xi_0 + \frac{\partial x}{\partial b}\eta_0 + \frac{\partial x}{\partial c}\zeta_0 = D\xi, \text{ etc.}$$

Ciò premesso, ricavando ξ_0, η_0, ζ_0 da coteste equazioni e poi eseguendo operazioni che superiormente vedremo, si ottiene (come volevasi dimostrare)

$$\frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z} = 0 \;, \quad \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x} = 0 \;, \quad \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} = 0 ,$$

avendo denotato con u', v', w' rispettivamente le $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$.

Ora, si moltiplichino le (2) rispettivamente per $\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial x}{\partial b}, \frac{\partial x}{\partial c}$ e poi si sommino membro a membro. Analogamente si operi dopo avere moltiplicato le (2) medesime rispettivamente per $\frac{\partial y}{\partial a}, \frac{\partial y}{\partial b}, \frac{\partial y}{\partial c}$; come pure dopo averle rispettivamente moltiplicate per $\frac{\partial z}{\partial a}, \frac{\partial z}{\partial b}, \frac{\partial z}{\partial c}$. E si tenga presente che

$$\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c} - \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b} = -\,\mathrm{D}\frac{\partial a}{\partial z}, \text{ etc.},$$

dove D, come abbiamo già accennato, rappresenta lo jacobiano

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a}, & \frac{\partial x}{\partial b}, & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a}, & \frac{\partial y}{\partial b}, & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a}, & \frac{\partial z}{\partial b}, & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}.$$

Avremo così

$$\frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} = 0,$$

come volevasi dimostrare.

Le (1) non richiedono la preliminare ipotesi che il moto sia verticoso (ipotesi che, naturalmente, figura nei suddetti teoremi di Helmholtz).

Le precedenti considerazioni, avendo carattere puramente cinematico, valgono *per qualsiasi mezzo continuo*. Il moto (anche qui appresso) viene implicitamente supposto regolare [1].

II. In virtù della suddetta condizione necessaria e sufficiente relativa alle (1), resulta che per un fluido *perfetto*, nell'ipotesi che la densità del fluido stesso sia funzione $f(p)$ della pressione p, le formule (1) del Cauchy sussisteranno qualora e *soltanto* qualora esista il potenziale delle forze.

III. Si considerino le equazioni del moto dei fluidi viscosi omogenei, nell'ipotesi che esista il potenziale delle forze. Coteste equazioni, mediante

[1] Per il significato che viene qui attribuito alla parola « regolare » vedasi la *Geometria del movimento* del Maggi, pag. 83; oppure i suoi *Principî della teoria matematica del movimento dei corpi*, pag. 75. Noi, dunque, diciamo che il movimento è regolare qualora delle x, y, z esistano e siano continue le derivate che occorre considerare, unitamente con la circostanza che il determinante funzionale D sia diverso da zero.

le notazioni vettoriali, verranno scritte

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{V}}{dt} = \operatorname{grad}\left(\mathrm{U} - \dfrac{p}{\varrho} + k \operatorname{div} \mathbf{V}\right) + \nu \Delta'_2 \mathbf{V} \\ \dfrac{d\varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \,, \end{cases}$$

dove i simboli hanno noti significati.

E si osservi che [1]

$$\Delta'_2 \mathbf{V} \equiv \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial z^2} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{V} - \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{V} \,.$$

È chiaro che, qualora si abbia $\Delta'_2 \mathbf{V} = 0$ oppure $\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{V} = 0$, varranno, per i suddetti fluidi viscosi, le formule del Cauchy. Ma nè l'una nè l'altra di coteste condizioni è necessaria [2]. Infatti, ricordando le considerazioni del precedente paragrafo, si vede che: condizione necessaria e sufficiente è che $\Delta'_2 \mathbf{V}$ sia anch'esso il gradiente di una funzione, cioè che si abbia $\operatorname{rot} \Delta'_2 \mathbf{V} = 0$. Ma $\operatorname{rot} \Delta'_2 \mathbf{V} = \Delta'_2 \operatorname{rot} \mathbf{V}$. Dunque, chiamando, per brevità, vettore armonico un vettore del quale le componenti siano funzioni armoniche, avremo che *condizione necessaria e sufficiente, affinchè (supposto esistente il potenziale delle forze) valgano, nei riguardi del moto di un fluido viscoso omogeneo, le formule* (1) *del Cauchy, è che il vettore* $\operatorname{rot} \mathbf{V}$ *sia un vettore armonico.*

Chimica. — *Determinazione quantitativa dell'acetone nelle polveri infumi.* Nota di A. Pieroni [3], presentata dal Socio Angelo Angeli.

I metodi ora seguìti per la determinazione dell'acetone in un liquido qualunque conducono a risultati poco concordanti; le cause di errore vanno ricercate nella difficoltà che presenta l'acetone a trasformarsi quantitativamente in iodoformio, nella facilità con cui quest'ultimo viene attaccato dall'alcali eccedente, nella perdita in jodo per effetto di reazioni secondarie, nella volatilità dell'jodoformio stesso. Queste cause di errore poi aumentano quando si voglia dosare l'acetone nel distillato che si ottiene da una polvere infume in corrente di vapore.

(1) Vedasi, *Analise vectorielle générale* di Burali-Forti e Marcolongo.

(2) Ricerche di condizioni sufficienti, nei riguardi, però, soltanto del teorema di Lagrange sul potenziale di velocità, furono eseguite dal De Saint-Venant, dal Bresse, dal Poincaré, dall'Hadamard e dal Duhem (vedasi Compt. Rend., 1902, pp 686 e 580).

(3) Pervenuta all'Accademia il 19 luglio 1918.