ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 novembre 1918.

F. D'Ovidio, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *ds^2 einsteiniani in campi newtoniani. VI. Il sottocaso B_2: Soluzioni quadrantali* ($\eta = 0$). Nota del Socio Tullio Levi-Civita.

Nella Nota precedente [1] è stata discussa quella particolare categoria di ds^2, appartenenti al sottocaso B_2), in cui l'incognita ξ si riduce ad una costante (soluzioni longitudinali). Conviene ora esaminare la opposta (e più generale) eventualità che ξ sia una effettiva funzione.

Valendomi di certo gruppo di equazioni cui deve soddisfare $\xi(x_1, x_2)$, sono condotto (§§ 1 e 2) ad esprimere molti elementi incogniti mediante una sola funzione $\Xi(\xi)$, preparandomi così un sistema differenziale direttamente integrabile con mezzi elementari. Ma ancora una volta (§ 3) va staccata dal caso generale una seconda categoria di soluzioni, specializzata (come già la prima nei riguardi di ξ) perchè una certa η si mantiene costante. La presente Nota si limita a questa seconda categoria. L'integrazione (§ 4) è immediata, e porta a ∞^3 soluzioni, di cui però (come già le longitudinali) soltanto ∞^1 sono intrinsecamente distinte. La loro esegesi geometrica e statica (§ 5) mette in evidenza la *proprietà quadrantale*, cioè la perpendicolarità fra le linee assiali e le linee di pendenza (veggasi per le

[1] Pp. 241-249 di questo volume.

denominazioni il § 1 della Nota IV) [1]. Si tratta, come si vede, di una proprietà puramente geometrica. A differenza di quanto accade nella prima categoria di soluzioni, non c'è legame semplice fra le linee di forza e le linee caratteristiche della deformazione.

Un caso limite (§ 6) di soluzioni quadrantali è assai prossimo ai campi uniformi dello spazio euclideo, e porge un nuovo esempio (cfr. la prefazione della Nota precedente) di quella poligenesi (a partire da un ordinario potenziale newtoniano) che contraddistingue le soluzioni rigorose dalla prima approssimazione.

1. — Le equazioni in ξ (per ξ non costante).

Si tratta delle equazioni [(17) della Nota IV]

$$\xi_{ik} - \tfrac{1}{2} \Delta_2 \xi \, a_{ik} = 0 \qquad (i, k = 1, 2), \tag{1}$$

dove le a_{ik}, le derivate covarianti della funzione ξ e il parametro si riferiscono alla forma binaria

$$d\sigma^2 = \sum_{1}^{2}{}_{ik} \, a_{ik} \, dx_i \, dx_k .$$

Le (1) rimangono identicamente soddisfatte nell'ipotesi particolare di ξ costante, ampiamente discussa nella Nota precedente. Vediamo ora le conseguenze dell'ipotesi opposta.

Moltiplicando per $\xi^{(k)}$ e sommando rispetto all'indice k, risulta

$$\sum_{1}^{2}{}_k \, \xi^{(k)} (\xi_{ik} - \tfrac{1}{2} \Delta_2 \xi \, a_{ik}) = 0 \qquad (i = 1, 2). \tag{1'}$$

Soffermiamoci un momento per stabilire che queste equazioni, pur essendo due soltanto, ammettono le originarie (1) come necessaria conseguenza, sicchè c'è equivalenza fra (1) e (1'). Osserviamo all'uopo che (essendo ormai esclusa la costanza di ξ) non possono annullarsi identicamente, nè entrambe le derivate ξ_1, ξ_2, nè entrambi gli elementi del sistema reciproco $\xi^{(k)} = \sum_{1}^{2}{}_h \, a^{(hk)} \xi_h$. Le (1') esigono perciò che si annulli il determinante di elementi

$$b_{ik} = \xi_{ik} - \tfrac{1}{2} \Delta_2 \xi \, a_{ik} \qquad (i, k = 1, 2).$$

Per sfruttare questa circostanza, poniamo

$$\sqrt{\pm b_{11}} = b_1 \quad , \quad \pm b_{12} = b_1 b_2 ,$$

adottando il segno superiore per b_{11} positivo, l'inferiore per b_{11} negativo,

[1] Ibidem, pag. 221.

in modo che b_1 riesca reale in ogni caso. Dall'annullarsi del determinante $b_{11}b_{22} - b_{12}^2$ segue allora $\pm b_{22} = b_2^2$, e rimane acquisito che (b_1, b_2 designando acconcie ausiliarie *reali*) sussistono le identità

$$\xi_{ik} - \frac{1}{2}\Delta_2\xi\, a_{ik} = \pm b_i b_k :$$

circa il segno da preporre ai secondi membri, basta ritenere che esso è il medesimo per ogni coppia i, k.

Moltiplichiamo per $a^{(ik)}$ e sommiamo. Il primo membro si annulla, talchè

$$\pm \sum_{ik}^{2}{}_1\, a^{(ik)} b_i b_k = 0.$$

Siccome la forma di coefficienti $a^{(ik)}$ è definita positiva (al pari del $d\sigma^2$, di cui è reciproca), la precedente condizione richiede l'identico annullarsi di b_1, b_2. Ne consegue

$$\xi_{ik} - \frac{1}{2}\Delta_2\xi\, a_{ik} = 0 ,$$

e quindi l'annunciata equivalenza fra le (1) e le (1').

Ciò premesso, ove si noti che

$$(\Delta\xi)_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_1^2{}_k\, \xi^{(k)}\xi_k = 2\sum_1^2{}_k\, \xi^{(k)}\xi_{ik} \quad ; \quad \sum_1^2{}_k\, a_{ik}\xi^{(k)} = \xi_i ,$$

le (1') assumono l'aspetto

$$(\Delta\xi)_i - \Delta_2\xi \cdot \xi_i = 0 \qquad (i = 1, 2),$$

e si possono quindi compendiare nell'unica equazione ai differenziali totali

$$d(\Delta\xi) - \Delta_2\xi \cdot d\xi = 0 .$$

Perchè questa sussista è necessario e basta che i due parametri $\Delta\xi$, $\Delta_2\xi$ sieno entrambi funzioni della sola ξ, la prima *a priori* arbitraria, e la seconda eguale alla rispettiva derivata. Attribuiremo a $\Delta\xi$ la forma $K_0\Xi(\xi)$ con K_0 costante positiva di dimensione l^{-2} (e quindi interpretabile come curvatura superficiale), che introduciamo per ragione di omogeneità, onde poter riguardare Ξ puro numero al pari di ξ.

Escludendo eventuali punti (isolati) in cui potrebbero annullarsi ξ_1 e ξ_2, il parametro $\Delta\xi$ è positivo; sarà perciò, generalmente, $\Xi(\xi) > 0$. Rimane inteso che noi riferiremo le nostre considerazioni a campi in cui una tale disuguaglianza si trova soddisfatta.

In definitiva le originarie (1) sono sostituibili colle due condizioni

$$(1'') \qquad \Delta\xi = K_0\Xi \quad , \quad \Delta_2\xi = K_0\Xi' :$$

va da sè che l'apice apposto ad una funzione di un solo argomento, quale la $\Xi(\xi)$, designa senza ambiguità derivazione rispetto a quell'argomento.

2. — Forma canonica del $d\sigma^2$ riferito alle linee $\xi =$ cost. e alle loro traiettorie ortogonali — Curvatura.

Possiamo immaginare riferito il nostro $d\sigma^2$ binario alle linee $\xi =$ cost. e alle loro traiettorie ortogonali. Sia φ^* un qualsiasi parametro di queste linee (che mi riservo di sostituire con una sua conveniente funzione φ). Potrò intanto porre, in virtù della prima delle (1″),

$$d\sigma^2 = \frac{1}{K_0}\left(\frac{d\xi^2}{\Xi} + \Phi\, d\varphi^{*2}\right),$$

essendo Φ una funzione di ξ, φ^*, sottoposta alla condizione di rendere verificata anche la seconda delle (1″). Dacchè si ha, per una generica funzione $f(\xi, \varphi^*)$,

$$\Delta_2 f = K_0 \sqrt{\frac{\Xi}{\Phi}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sqrt{\Xi \Phi}\, \frac{\partial f}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi^*}\left(\frac{1}{\sqrt{\Xi \Phi}}\, \frac{\partial f}{\partial \varphi^*}\right) \right\},$$

assumendo $f = \xi$, si ricava

$$\Xi' = \sqrt{\frac{\Xi}{\Phi}}\, \frac{\partial}{\partial \xi} \sqrt{\Xi \Phi},$$

ossia

$$\frac{1}{\Phi}\, \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{2}{\Xi}\, \Xi'.$$

Ne consegue

$$\Phi = \Phi^*\, \Xi,$$

in cui la costante di integrazione Φ^* va ritenuta funzione *a priori* arbitraria di φ^*. Con un cambiamento di parametro, si rende

$$\sqrt{\Phi^*}\, d\varphi^* = d\varphi,$$

talchè risulta

$$d\sigma^2 = \frac{1}{K_0}\left(\frac{d\xi^2}{\Xi} + \Xi\, d\varphi^2\right), \tag{2}$$

che risguarderemo come forma canonica del nostro $d\sigma^2$. Si tratta evidentemente di metrica spettante ad una superficie rotonda, i cui meridiani ($\varphi =$ cost) e paralleli ($\xi =$ cost) costituiscono un reticolato in corrispondenza equivalente (che conserva le aree) col reticolato cartesiano (ξ, φ) della metrica euclidea $\frac{1}{K_0}(d\xi^2 + d\varphi^2)$.

È appena necessario aggiungere che, da (2), si passa alla forma geodetica, ponendo

$$du = \frac{d\xi}{\sqrt{\Xi}},$$

con che

$$d\sigma^2 = \frac{1}{K_0}(du^2 + \Xi\, d\varphi^2);$$

e alla forma isometrica, ponendo

$$d\chi = \frac{d\xi}{\Xi},$$

con che

$$d\sigma^2 = \frac{\Xi}{K_0}(d\chi^2 + d\varphi^2).$$

La curvatura gaussiana K si calcola nel modo più spiccio dalla espressione geodetica del $d\sigma^2$, in base alla formula

$$K = -K_0 \frac{1}{\sqrt{\Xi}} \frac{d^2\sqrt{\Xi}}{du^2}.$$

Sostituendo a du la sua espressione $\frac{d\xi}{\sqrt{\Xi}}$, si ricava

$$K = -\tfrac{1}{2} K_0 \Xi''. \tag{3}$$

3. — Richiamo del sistema da integrare — Caso di $\eta = 0$.

Finora abbiamo considerato le (1) per se stesse, e le abbiamo, per così dire, risolute parametricamente, esprimendo tutto mediante la funzione (positiva) $\Xi(\xi)$, che le (1) stesse lasciano completamente arbitraria. È il momento di riprendere le altre equazioni del problema nella forma loro attribuita alla fine della Nota IV.

Per raccogliere le idee, rammento che, nella classe di ds^2 einsteiniani di cui stiamo occupandoci, la metrica spaziale è definita da

$$dl^2 = e^{2\tau}(d\sigma^2 + dx_3^2),$$

dove, per quanto precede, il $d\sigma^2$ è della forma (2), mentre

$$e^{-\tau} = \xi + \eta,$$

con η funzione della sola x_3. La velocità della luce si esprime per ξ, η e un'ulteriore funzione ζ della sola x_3, avendosi

$$V = V_0 \frac{e^{\zeta}}{\xi + \eta}:$$

V_0 designa una costante arbitraria, cui spettano le dimensioni di una velocità, mentre le funzioni ξ, η e ζ hanno dimensioni nulle.

Fra ξ, η, ζ e gli elementi del $d\sigma^2$ (coefficienti e curvatura), passano, oltre alle (1) già sfruttate, le equazioni (16), (18), (19) della Nota IV, che dovrei intanto trascrivere, sostituendovi, in luogo di $\Delta\xi$, $\Delta_2\xi$ e K le loro espressioni (1″) e (3) per mezzo della sola Ξ. Riporterò queste formule nella successiva Nota VII, quando mi accingerò a discuterle con referenza al caso generale in cui η si suppone una effettiva funzione di x_3. Qui mi limiterò al caso, in certo modo singolare, in cui η si riduce ad una costante. Si può allora, ragionando come a § 1 della Nota precedente, ritenerla addirittura nulla; la (16) rimane identicamente soddisfatta, e le equazioni (18), (19) (postovi in conformità $e^{-\tau} = \xi$) assumono l'aspetto.

$$(-\tfrac{1}{2}K_0\Xi'' + \zeta'' + \zeta'^2)\,\xi + K_0\Xi' = 0\,, \tag{4}$$

$$-\tfrac{1}{2}\Xi''\xi^2 + 2\Xi'\xi - 3\Xi = 0\,. \tag{5}$$

Il quadrato dell'elemento lineare $e^{2\tau}(d\sigma^2 + dx_3^2)$, esplicitato analogamente in base alla (2), ove si ponga

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{K_0}}\,\psi\,, \tag{6}$$

sostituendosi così alla variabile indipendente x_3 (che è una lunghezza) la ψ (che è un puro numero), diviene

$$dl^2 = \frac{1}{K_0\xi^2}\left\{\frac{d\xi^2}{\Xi} + \Xi\,d\varphi^2 + d\psi^2\right\}. \tag{7}$$

Le curvature principali sono, come in tutte le soluzioni B_2), legate dalle relazioni

$$\omega_1 = \omega_2 = -\tfrac{1}{2}\,\omega\,,$$

dove ω corrisponde alle giaciture $x_3 = \text{cost.}$, ossia $\psi = \text{cost.}$, ed è definita in generale dalla equazione (20) della più volte citata Nota IV, equazione che, nel caso presente, si riduce a

$$\omega = K_0(-\tfrac{1}{2}\Xi''\xi^2 + \Xi'\xi - \Xi)\,. \tag{8}$$

Rileverò da ultimo che, ponendo $\eta = 0$ nella espressione poc'anzi richiamata di V, si ha

$$V = V_0\,\frac{e^{\zeta}}{\xi}\,. \tag{9}$$

4. — Determinazione delle soluzioni per cui $\eta = 0$.

Le nostre variabili indipendenti sono oramai: la ξ *essenzialmente positiva* (in quanto si identifica, per $\eta = 0$, coll'esponenziale $e^{-\tau}$), la φ e la ψ. Le funzioni incognite si riducono a due, dipendenti entrambe da un solo argomento: la $\Xi(\xi)$ e la $\zeta(x_3)$, in cui x_3 va sostituito con ψ a norma della (6). Facendo apparire ψ come variabile di derivazione in luogo di x_3, e ponendo per brevità

$$\frac{d^2\zeta}{d\psi^2}+\left(\frac{d\zeta}{d\psi}\right)^2=e^{-\zeta}\frac{d^2e^{\zeta}}{d\psi^2}=Z\,, \tag{10}$$

si ha

$$\zeta''+\zeta'^2=K_0\,Z\,.$$

Con ciò (essendo lecito di dividere senza riserve per ξ), la (4) può essere scritta

$$Z=\tfrac{1}{2}\,\Xi''-\frac{1}{\xi}\,\Xi'\,. \tag{4'}$$

Dei due membri, il primo può dipendere soltanto da ψ, il secondo soltanto da ξ. Perciò essi sono entrambi costanti (e puri numeri). Designandone il valore comune con $-\mu$, la (4′) si scinde nelle due:

$$Z=-\mu\ ,\quad \tfrac{1}{2}\,\Xi''-\frac{1}{\xi}\,\Xi'=-\mu\,.$$

Ridotta a mezzo di quest'ultima, la (5) diviene

$$\Xi'\xi-3\Xi=-\mu\xi^2\,,$$

ossia

$$d\left(\frac{1}{\xi^3}\,\Xi\right)=-\mu\,\frac{d\xi}{\xi^2}\,.$$

Integrando e attribuendo alla costante la forma $\varepsilon\lambda$, con $\varepsilon=\pm1$ e $\lambda>0$, si ha

$$\Xi=\mu\xi^2+\varepsilon\lambda\xi^3\,.$$

Si verifica immediatamsnte che, con tale espressione di Ξ, rimane senz'altro soddisfatta anche la precedente

$$\tfrac{1}{2}\,\Xi''-\frac{1}{\xi}\,\Xi'=-\mu\,;$$

e quindi la (5) per necessaria conseguenza. Va rilevato che λ non può essere zero, perchè in tal caso si annullerebbe anche ω in base alla (8), e si sarebbe ricondotti ad uno spazio euclideo, caso che sempre si esclude, perchè già esaurito nella Nota II. Riconosciuto che $\lambda\neq0$, diviene lecito senza pregiudizio della generalità supporre addirittura $\lambda=1$. Infatti, partendo da un valore positivo generico di questa costante, basta porre

$$K_0=\frac{K_0^\star}{\lambda}\ ,\quad \mu=\lambda\mu^\star\ ,\quad \Xi=\lambda\Xi^\star=\lambda(\mu^\star\xi^2+\varepsilon\xi^3)\ ,\quad \varphi=\lambda^\star\varphi\,,$$

perchè tutte le formule precedenti rimangano inalterate salvo lo scambio materiale di $K_0, \mu, \Xi, \varphi, \lambda$ in $K_0^\star, \mu^\star, \Xi^\star, \varphi^\star, 1$ ($K_0^\star$ risultando, ben si intende, positiva al pari di K_0). C. D. D.

Possiamo pertanto ritenere

$$\Xi = \mu\xi^2 + \varepsilon\xi^3 \qquad (\varepsilon = \pm 1), \tag{11}$$

con che la (8) si riduce a

$$\omega = -\varepsilon K_0 \xi^3 \text{ [1]}. \tag{8'}$$

La determinazione della funzione ζ dipende dalla equazione $Z = -\mu$, la quale, badando alla (10), diviene

$$\frac{d^2 e^\zeta}{d\psi^2} + \mu e^\zeta = 0.$$

A prescindere da inessenziali costanti di integrazione [2] (e da un eventuale scambio, pure inessenziale, di ψ in $-\psi$), ne deduciamo:

$$e^\zeta = \begin{cases} \cos\sqrt{\mu}\,\psi & (\mu > 0), \\ \cosh\sqrt{-\mu}\,\psi, \text{ ovvero } e^{\sqrt{-\mu}\psi} & (\mu < 0), \\ \psi, \text{ ovvero } 1 & (\mu = 0). \end{cases} \tag{12}$$

In base alla (11), la metrica spaziale (7) contiene le due costanti K_0 e μ; nella V figura inoltre V_0. Perciò questa seconda categoria ha lo stesso grado di arbitrarietà delle soluzioni longitudinali (Nota prec., § 3); e consta anch'essa (K_0 e V_0 dipendendo dalla scelta, *a priori* arbitraria, delle unità di lunghezza e di tempo) di ∞^1 soluzioni intrinsecamente distinte.

5. — Giustificazione dell'appellativo quadrantale — Comportamento geometrico e meccanico.

La congruenza assiale ($\xi = \text{cost.}$, $\varphi = \text{cost.}$ colle attuali notazioni), che corrisponde alla curvatura ω, è isotropa e normale [cfr. Nota IV, § 2] per tutte le B_2); nella precedente categoria di soluzioni essa era altresì geodetica; ora non più perchè il coefficiente di $d\psi^2$ nella (7) dipende da ψ.

(1) Anche per questa seconda categoria di soluzioni, si ha, come già per la prima [Nota precedente, § 3], un controllo diretto della condizione generale di integrabilità [Nota IV, § 2] $\omega = \omega_0 e^{-3\tau}$ con ω_0 costante. Ora $e^{-\tau} = \xi$, $\omega_0 = -\varepsilon K_0$, mentre, per la prima categoria, si aveva $e^{-\tau} = \eta$, $\omega_0 = \varepsilon K_0$.

(2) Queste sarebbero infatti: o moltiplicativa nell'espressione di e^ζ; o additiva rispetto alla variabile indipendente ψ. La prima è superflua perchè si congloberebbe nella V_0 che compare nella espressione (9) di V (sola formula per cui ci interessa e^ζ); la seconda è pure inessenziale, perchè ψ compare nelle formule soltanto pel tramite di $d\psi^2$, e quindi si può, senza alterare le formule stesse, sostituire ψ con $\pm\psi + \text{cost}$.

Inoltre è diverso nei due casi il modo di variare di ω. Nelle soluzioni longitudinali le linee assiali erano traiettorie ortogonali delle superficie $\omega = \text{cost.}$, e quindi coincidevano colle linee di pendenza. Qui, a norma della (8′), le linee di pendenza sono le ξ ($\varphi = \text{cost.}$, $\psi = \text{cost.}$), ortogonali alle linee assiali ψ. Le soluzioni di cui stiamo occupandoci si chiamano *quadrantali* appunto per il fatto che si tagliano ad angolo retto le due congruenze di linee, intrinsecamente caratteristiche, assiali e di pendenza.

Giova rilevare che le superficie $\varphi = \text{cost.}$, e così pure le $\psi = \text{cost.}$, sono *piani geodetici*, nel senso che ogni loro linea geodetica è anche geodetica rispetto alla metrica dello spazio ambiente [1]; all'incontro non si tratta di superficie a curvatura gaussiana nulla: per es. le $\psi = \text{cost.}$, in base alla stessa definizione di curvatura riemanniana secondo una data giacitura, hanno la curvatura ω.

Le linee assiali (su cui varia la sola ψ) appartengono evidentemente ai piani geodetici $\varphi = \text{cost.}$ e ne costituiscono le linee $\xi = \text{cost.}$ Esse risultano geodeticamente parallele nella metrica superficiale subordinata dalla (7) per $\varphi = \text{cost.}$ La loro curvatura geodetica γ, in base a nota formula [2], vale

$$\gamma = -\mathrm{K}_0 \xi^2 \sqrt{\Xi}\, \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{K}_0 \xi^2}}\right) = \sqrt{\mathrm{K}_0 \Xi}\,,$$

e si mantiene manifestamente costante lungo una stessa linea $\xi = \text{cost.}$ *Le linee assiali possono pertanto riguardarsi come circoli geodetici* (linee piane a curvatura costante) *della metrica* (7).

Se si fa convergere ξ a zero (come già η, a § 3 della Nota preced.), ci si allontana indefinitamente nella varietà, tendendo all'∞ la distanza da una generica superficie $\xi = \text{cost.}$, contata sulle geodetiche ad essa ortogonali; ecc.

Le superficie equipotenziali $-\frac{1}{2}\mathrm{V}^2 = \text{cost.}$, o, ciò che è lo stesso, $\mathrm{V} = \text{cost.}$, non coincidono più, come nell'altra categoria, colle $\omega = \text{cost.}$, ma dipendono da ξ e da ψ a norma delle (9) e (12). Perciò le linee di forza non coincidono colle linee assiali (su cui varia la sola ψ), nè colle linee di pendenza (su cui varia la sola ξ); e nemmeno le incontrano sotto angolo retto. Ne consegue, considerando intuitivamente l'andamento delle linee di forza come causa meccanica e la distorsione geometrica dello spazio, cioè l'andamento delle linee principali di curvatura (e, per esse, assiali e di pendenza), come effetto, che il comportamento delle soluzioni in discorso non è longitudinale, nè trasversale; ma misto.

(1) Si può rendersene conto sia, direttamente, in base alle equazioni di Lagrange per le geodetiche, sia invocando un risultato specifico dovuto al. sig. Hadamard. Cfr. *Sur les éléments linéaires à trois dimensions*, Bull. des sciences math., tomo XXV, 190 , pp. 37-40.

(2) Cfr. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I [Pisa, Spoerri, 190], pag. 1°4.

6. — Caso limite.

Supponiamo in particolare che la costante (numerica) μ abbia un valore positivo molto grande. L'ipotesi si intenderà precisata, convenendo di riferirsi a valori moderati della variabile ξ, tali cioè che ξ^3 riesca trascurabile di fronte a $\mu\xi^2$.

Noto anzi tutto che l'incondizionata trascurabilità di ξ^3 implica, in causa della (8'), l'annullarsi di ω, e con essa di $\omega_1 = \omega_2 = -\frac{1}{2}\omega$, ossia l'euclideità dello spazio. La stessa conclusione sussiste sotto l'ipotesi più lata che si possa prescindere da ξ^3 di fronte a $\mu\xi^2$. Infatti Ξ si riduce allora a $\mu\xi^2$, e l'espressione (7) del quadrato dell'elemento lineare, ponendo

$$r = \frac{1}{\sqrt{K_0\mu}}\frac{1}{\xi} \quad , \quad z = \sqrt{\frac{\mu}{K_0}}\,\varphi \quad , \quad \theta = \sqrt{\mu}\,\psi \, ,$$

diviene

$$dl^2 = dr^2 + dz^2 + r^2 d\theta^2 \, ,$$

in cui si ravvisa la nota forma euclidea riferita a coordinate cilindriche.

La (9), in virtù della (12) per $\mu > 0$, porge

$$V = V_0 \sqrt{K_0\mu}\; r\cos\theta \, , \tag{13}$$

e mostra per conseguenza che le superficie $V = \text{cost.}$ si identificano coi piani (paralleli tra loro e all'asse delle z) $r\cos\theta = \text{cost.}$ Le linee di forza sono le perpendicolari a questi piani, mentre la forma limite delle linee assiali (su cui varia la sola ψ, ossia la sola θ) è costituita dai circoli paralleli, e la forma limite delle linee di pendenza (su cui varia la sola ξ, ossia la sola r) è offerta dai raggi incidenti all'asse delle z sotto angolo retto. Come si vede, le linee di forza incontrano sia le linee assiali che le linee di pendenza sotto angoli variabili da punto a punto, anzi suscettibili di qualsivoglia determinazione.

A tenore della (13), ove si ponga $r\cos\theta = x - x_0$ (x_0 costante), V varia linearmente colla distanza x dal piano $r\cos\theta = -x_0$; perciò l'aspetto limite della forza è quello del caso B_3) (Nota II, § 7), ossia, si può dire, il campo uniforme [1].

Per quanto precede, le linee caratteristiche della deformazione spaziale presentano, anche al limite, un comportamento obliquo (non longitudinale, nè trasversale) rispetto alle linee di forza.

[1] Va notato che l'espressione *rigorosa* del potenziale statico $-\frac{1}{2}V^2$ sarebbe quadratica in x, e la forza avrebbe quindi carattere di forza elastica di richiamo (verso il piano $x = x_0$). Però, come si vide a proposito di B_3), le condizioni che interessano praticamente sono quelle in cui è trascurabile il quadrato del rapporto $\frac{x}{x_0}$. Allora è lecito prescindere dal termine quadratico in $-\frac{1}{2}V^2$, con che si ricade nei campi uniformi,

c. d. d.