ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1918.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

Geometria. — *Studî relativi all'elemento lineare proiettivo di una ipersuperficie.* Nota del Corrisp. GUIDO FUBINI [1].

1. Siano $x, y, z, \dots, \tau, t, w$ le $n+2$ coordinate *omogenee* di un punto di uno spazio S_{n+1} ad $n+1$ dimensioni, in cui sia data una ipersuperficie V_n definita assumendo le $x, y, \dots, w$ come funzioni di n parametri $u_1, u_2, \dots, u_n$. Sia $g = \Sigma a_{rs}\, du_r\, du_s$ una *qualsiasi* forma quadratica covariante col discriminante $A \neq 0$. Porremo [2]

$$(1)\quad \begin{cases} F_2 = \dfrac{1}{\sqrt{A}}(x, x_1, x_2, \dots, x_n, d^2x) \;;\; \Phi_3 = \dfrac{1}{\sqrt{A}}(x, x_1, x_2, \dots, x_n, d^3x) \\ \Delta_3 = 2\Phi_3 - 3\,dF_2 \;;\; F_3 = \Delta_3 + \dfrac{3}{n+2} F_2\, d \log \dfrac{\nabla}{A}\,. \end{cases}$$

La F_3 si può definire in tal modo, soltanto se il discriminante ∇ di F_2 è diverso da zero (per gli altri casi cfr. loc. cit.). Le forme precedenti

[1] Pervenuta all'Accademia il 4 settembre 1918.

[2] Cfr. le Note dell'A.: *Fondamenti per la geometria* ecc., pubblicate in questo volume di questi Rendiconti. I risultati sono stati perfezionati e generalizzati alle ipersuperficie in una Memoria in corso di stampa negli Annali di Matematica. Conservando le notazioni di questi lavori, indico con x_r, x_{rs} ecc. derivate *covarianti* rispetto alla forma g; chiamo punto x il punto di coordinate $(x, y, \dots, w)$. Con $(x, x_1, x_2, \dots, x_n, d^2x)$ indico il determinante di ordine $n+2$, di cui gli elementi scritti tra ( ) formano la prima riga, e le altre righe se ne deducono sostituendo alla x ordinatamente le y, z, ecc. Con notazioni analoghe indico determinanti analoghi.

sono intrinseche (di significato indipendente dalla scelta delle u_i); data V_n, *esse sono determinate a meno di uno stesso fattore* (nel caso generale si possono anche [loc. cit.] definire due forme φ_2, φ_3 ad esse proporzionali completamente determinate dalla V_n). La coppia delle forme F_2, F_3 *compone l'elemento lineare proiettivo di* V_n. *Il primo dei problemi*, cui è dedicata questa Nota, è di riconoscere *quando tale elemento lineare si riduce ad una sola forma*, cioè *quando la* F_2 *oppure la* F_3 *è identicamente nulla.* Noi anzi studieremo un problema più generale, *che ha senso anche nel caso* $\nabla = 0$, ricercando *quando è nulla* F_2, oppure *quando* Δ_3 *è divisibile per* F_2 (*ciò che avviene infatti se* $F_3 = 0$).

2. Scriviamo F_2, Δ_3 in forma specialmente comoda supponendo $x = 1$, $y = u_1$, $z = u_2$, ..., $t = u_n$, e la V_n definita da un'equazione

$$w = w(u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Le varietà $u_i = \text{cost.}$ sono le intersezioni di V_n con un iperpiano $y - u_1 x = 0$, oppure $z - u_2 x = 0$, oppure ecc. Posto $g = \Sigma du_i^2$, si trova

$$F_2 = \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_2 & u_n & w \\ 0 & 1 & 0 & 0 & w_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & w_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & w_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma w_{rs}\, du_r\, du_s \end{vmatrix} = \Sigma w_{rs}\, du_r\, du_s .$$

Analogamente si trova $\Phi_3 = \Sigma w_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t + 3\,\Sigma w_{rs}\, du_r\, d^2u_s$, da cui

$$\Delta_3 = -\Sigma w_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t .$$

La F_2 *è identicamente nulla*, se le w_{rs} sono nulle, cioè se w è un polinomio omogeneo di primo grado nelle $1 = x$, $u_1 = y$, ..., $u_n = t$, cioè *se* V_n *è un iperpiano* (com'era evidente *a priori*, perchè $F_2 = 0$ definisce le direzioni assintotiche).

3. Premettiamo ora un'osservazione: *Lungo una retta, che giaccia su* V_n, *sono nulle entrambe le* F_2, Δ_3. Infatti, senza ledere la generalità, tale retta si può pensare definita dalle $u_1 = u_2 = \cdots = u_{n-1} = w = 0$. Perciò w e quindi anche w_n, w_{nn}, w_{nnn} sono nulli per $u_1 = u_2 = \cdots = u_{n-1} = 0$; se ne deduce tosto che per $u_i = du_i = 0$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ anche F_2 e Δ_3 sono nulli. *Il teorema reciproco falso per* $n > 2$ (come proveremo più avanti con un esempio) *è vero per* $n = 2$; *una linea di* V_n, *se* $n = 2$, *che annulli* F_2 *e* Δ_3 *è retta* (con una lieve ulteriore condizione che enunciamo più sotto). Una varietà V' di V_n lungo cui $F_2 = \Delta_3 = 0$

soddisfa alla $F_2 = 0$ cioè alla $\Sigma dw_i\, du_i = 0$ ed alla $d F = 0$, che, in virtù della $\Delta_3 = 0$, si può scrivere $\Sigma dw_i\, d^2 u_i = 0$

$$\Sigma dw_i\, du_i = \Sigma dw_i\, d^2 u_i = 0 .$$

Se $n = 2$, queste due equazioni nelle dw_i dànno due casi possibili:

A) $du_1\, d^2 u_2 - du_2\, d^2 u_1 = 0$, cioè $\frac{d}{du_1}\left(\frac{du_2}{du_1}\right) = 0$, ossia $\frac{du_2}{du_1} = C$ $=$ cost. Quindi $\frac{dw}{du_1} = w_1 + C w_2$; $\frac{d^2 w}{du_1^2} = w_{11} + 2 C w_{12} + C^2 w_{22} = 0$, in virtù dell'equazione $F_2 = 0$, cui soddisfa la $C = \frac{du_2}{du_1}$. Quindi sia u_2 che w sono funzioni lineari di u_1, e la curva considerata è *retta*.

B) È invece $dw_1 = dw_2 = 0$, cioè $w_{11}\, du_1 + w_{12}\, du_2 = w_{21}\, du_1 + w_{22}\, du_2 = 0$. Se $w_{11}\, w_{22} - w_{12}^2 \neq 0$, ne segue $du_1 = du_2 = 0$, cioè $u_1 =$ cost., $u_2 =$ cost. Si tratterebbe ancora di una retta posta su V_n; ma questo caso di una retta $u_i =$ cost. posta su V_n è escluso dall'ipotesi che V_n si possa definire dando w in funzione di u_1, u_2. Dunque sulla linea considerata è $w_{11}\, w_{22} - w_{12}^2 = 0$. La linea considerata è pertanto singolare, perchè è una linea di *punti parabolici* di V_n. Lungo essa è soddisfatta la $\frac{F_2}{du_1^2} = w_{11} + 2 w_{12} \frac{du_2}{du_1} + w_{22}\left(\frac{du_2}{du_1}\right)^2 = 0$; anzi la $\frac{du_2}{du_1}$ è radice doppia di tale equazione: ciò che enunceremo dicendo che F_2 si annulla del *secondo* ordine. Noi *supporremo* che anche Δ_3 si annulli almeno del *secondo* ordine; cioè che $\frac{du_2}{du_1}$ sia radice almeno doppia anche di $\Delta_3 = 0$. In tal caso lungo la nostra linea è

$$\frac{d^2 u_2}{du_1^2} = \frac{d}{du_1}\left(- \frac{w_{11}}{w_{12}}\right) = - \frac{1}{w_{12}}\left[w_{111} + 2 w_{112}\left(- \frac{w_{11}}{w_{12}}\right) + w_{122}\left(- \frac{w_{11}}{w_{12}}\right)^2 \right].$$

La quantità tra [ ] è nulla purchè $- \frac{w_{11}}{w_{12}}$ è radice doppia anche di $\Delta_3 = 0$; e pertanto $\frac{d^2 u_2}{du_1^2} = 0$, cioè $\frac{du_2}{du_1} = C =$ cost., e la dim. continua come nel caso A.

4. Supponiamo infine Δ_3 divisibile per F_2 ed n qualsiasi. Seghiamo V_n con lo spazio lineare S_3 a tre dimensioni definito dalle

$$(1) \qquad u_i = \varepsilon_i\, v_1 + \eta_i\, v_2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$(\varepsilon_i, \eta_i = \text{cost.} ;\ v_1, v_2 \text{ parametri}).$$

La superficie V_2 intersezione avrà come forme F'_2, Δ'_3 quelle che si ottengono dalle F_2, Δ_3 con la sostituzione (1); e quindi Δ'_3 sarà divisibile per F'_2; le linee di V_2 che annullano F_2 (assintotiche) annulleranno anche *almeno dello stesso ordine* la forma $\mathcal{A}_3$, e quindi saranno rette. Se per ogni punto di V_2 escono due assintotiche, V_2 sarà doppiamente rigata, e quindi sarà una quadrica; se invece esce un'assintotica sola, la V_2 sarà una sviluppabile. Nel primo caso V_n, essendo da un S_3 generico tagliata in una quadrica, sarà pure *una quadrica*. Nel secondo caso la F_2 [diventando con la sostituzione (1) e per tutti i valori delle ε, η una forma F'_2 a discriminante nullo] sarà il quadrato di una forma lineare $F_1 = \Sigma \sigma_i \, du_i$. Consideriamo un punto O di coordinate u_i, e un punto consecutivo O' di coordinate $u_i + du_i$ tali che $F_1 = 0$. La direzione OO' sarà assintotica; un S_3 che la contenga taglia V_n in una sviluppabile di cui OO' è generatrice; pertanto la retta OO' è *tutta* contenuta in V_n. Poichè F_1 è lineare, le rette OO' generano un S_{n-1}, posto sia su V_n che nell'iperpiano S_n tangente in O. E la V_n si potrà pensare generata da ∞^1 di tali S_{n-1}; se con $t = v_1$, $w = \varphi(v_1)$ indichiamo la curva L in cui la V_n taglia il piano $(x = 1)$ $y = z = \cdots = \tau = 0$, da ogni punto di L esce (almeno) un S_{n-1}; e V_n si potrà pensare definita da equazioni parametriche del tipo

$$x = 1 \ ; \ y = \sum_2^n v_i \, \psi_{i1}(v_1) \ ; \ z = \sum_2^n v_i \, \psi_{i2}(v_1) \ ; \dots ; \ \tau = \sum_2^n v_i \, \psi_{i,n-1}(v_1)$$

$$t = v_1 + \sum_2^n v_i \, \psi_{in}(v_1) \quad ; \quad w = \varphi(v_1) + \sum_2^n v_i \, \psi_{i,n+1}(v_1)$$

ove le ψ_{ik} sono funzioni di v_1 (gli indici non indicano più derivate).

Se la V_n non è essa stessa iperpiana, dalle equazioni per $y, \dots, \tau$ possiamo ricavare le $v_2, \dots, v_n$ come funzioni lineari omogenee delle $y, \dots, \tau$. Sostituendo nelle equazioni per t e w, troviamo:

$$t = u_1 + \sum_2^n u_i \, \psi_i(u_1) \qquad w = \varphi(u_1) + \sum_2^n u_i \, \chi_i(u_1)$$

$$(u_1 = v_1) \qquad y = u_2 \, , \, z = u_3 \, , \dots , \, \tau = u_n$$

come equazioni parametriche di V_n, essendo φ, ψ_i, χ_i funzioni di u_1.

Posto $g = \Sigma du_i^2$, la F_2 con questi parametri u diventa $\pm (t'_{u1} \, d^2 w - w'_{u1} \, d^2 t)$; esprimendo che F_2 è un quadrato (cioè una forma del tipo $A_{11} \, du_1^2$), si trova: $\chi'_r = \varphi' \, \psi'_r$ $(r = 2, 3, \dots, n)$. Queste condizioni equivalgono, com'è facile riconoscere, all'una od all'altra delle seguenti proposizioni (tra loro equivalenti):

A) Due S_{n-1} consecutivi (cioè due S_{n-1} corrispondenti ai valori u_1, oppure $u_1 + du_1$ di u_1) si tagliano in un S_{n-2}. (Si noti che, se due tali S_{n-1} coincidessero sempre, la V_n si ridurrebbe ad un S_{n-1}: ciò che è impossibile).

B) Due S_{n-1} consecutivi appartengono ad un S_n, che tocca V_n in *tutti* i punti del S_{n-1} considerato. (È facile riconoscere che l'equazione di un S_n tangente dipende dal *solo* parametro u_1). Perciò V_n è l'inviluppo di ∞^1 iperpiani, o, come potremmo dire, è una *sviluppabile* di S_n. Quindi: *Le sole ipersuperficie per cui l'elemento lineare si riduce ad una sola forma, o per cui* $\mathcal{A}_3$ *è divisibile per* F_2, *sono gli iperpiani, le sviluppabili, le quadriche.*

Osservazione. — Ne risulta subito che per $n > 2$ su V_n può esistere *una linea non retta che annulli* F_2, $\mathcal{A}_3$: p. es. su una quadrica una linea non retta che in ogni suo punto sia tangente ad una generatrice di V_n.

5. Abbiamo qui dato un esempio, in cui dalle forme F_2, F_3 si deduce la V_n relativa; il metodo generale è però quello di studiare *le equazioni differenziali*, che permettono di definire una ipersuperficie di forme date. Nel loc. cit. io con metodo *euristico* ho trovato tali equazioni se $n=2$, oppure 3. Possiamo perciò prevedere il tipo generale di tali equazioni, e, per provarle nel caso più generale, basterà *verificarle*. Ciò che ora noi faremo. Determinate per una V_n le forme F_2, F_3, cambiamo la forma g, assumendo $g = F_2$; e moltiplichiamo poi le coordinate *omogenee* $x, y, \ldots, w$ con un tale fattore, da controbilanciare il cambiamento della g, e da lasciar immutate $g = F_2$ ed F_3 (loc. cit.). Posto

$$F_2 = \Sigma a_{rs}\, du_r\, du_s\,, \quad F_3 = 2\,\Sigma \mathcal{A}_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t\,,$$

indicati poi con indici le derivate *covarianti* rispetto F_2 e con A_{rs} il complemento algebrico di a_{rs} in $A = \nabla$ diviso per A, si ha:

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{A}}\,(x\,, x_1\,, \ldots\,, x_n\,, \Sigma x_{rs}\, du_r\, du_s)\,;$$

$$F_3 = \frac{2}{\sqrt{A}}\,(x\,, x_1\,, \ldots\,, x_n\,, \Sigma x_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t) = \Sigma' B_{ir}$$

ove

$$B_{ir} = \frac{2}{\sqrt{A}}\,(x\,, x_1\,, \ldots\,, x_{i-1}\,, p_i\,, x_{i+1}\,, \ldots\,, x_{r-1}\,, p_r\,, x_{r+1}\,, \ldots\,, x_n\, dx) \tag{1}$$

ove la Σ' è estesa a tutte le coppie $i\,, r$ di indici con $i < r$ e $p_r = \sum_t x_{rt}\, du_t$.

Poichè $x_{rst} - x_{rts}$ è funzione *lineare* delle x_r, la $\frac{1}{\sqrt{A}}\,(x\,, x_1\,, \ldots\,, x_n\,, x_{rst})$ *è simmetrica* in $r\,, s\,, t$, *e vale* $\mathcal{A}_{rst}$. Di più è (loc. cit.)

$$\sum_{r,s} A_{rs}\, \mathcal{A}_{rst} = 0 \qquad (\text{per } t = 1\,, 2\,, \ldots\,, n)\,. \tag{2}$$

Poniamo

$$X = \frac{1}{n} \sum A_{rs}\, x_{rs}\,, \quad \text{e analoghe per } Y\,, Z \text{ ecc.} \tag{3}$$

Sarà

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\,(x\,, x_1\,, \ldots\,, x_n\,, X) = \frac{1}{n}\, \Sigma A_{rs}\, a_{rs} = 1\,.$$

Dunque in particolare le X, Y ecc. *non* sono combinazioni lineari delle $x, x_1, \ldots, x_n$, delle $y, y_1, \ldots, y_n$ ecc. Le equazioni

$$x_{rs} = \sum_t B_{rst}\, x_t + c_{rs}\, x + \mu_{rs} X \quad \text{e analoghe in } y, z, \ldots$$

determinano univocamente le $B_{rst}, c_{rs}, \mu_{rs}$. Anzi, siccome

$$\frac{1}{\sqrt{A}}(x, x_1, \ldots, x_n, x_{rs} - a_{rs} X) = 0, \quad \text{segue } \mu_{rs} = a_{rs}.$$

Potremo dunque, cambiando lievemente le notazioni, scrivere:

$$(4) \qquad x_{rs} = \sum_{l,m} b_{rsl}\, A_{lm}\, x_m + a_{rs} X + c_{rs}\, x \quad (\text{e analoghe in } y, z, \ldots).$$

Dalla (3), derivando *covariantemente*, ricordando che $x_{rst} - \Delta_{rst} X$ è combinazione lineare delle x, x_i, perchè $(x, x_1, \ldots, x_n, x_{rst} - \Delta_{rst} X) = 0$, troviamo:

$$X_t = \frac{1}{n} \sum_{r,s} A_{rs}\, x_{rst} = \frac{1}{n} \sum_{r,s} A_{rs}\, \Delta_{rst}\, X + \cdots,$$

ove, *come nelle formole seguenti, con* ... *intendiamo dei termini, combinazioni lineari delle* x, x_i. Per (2) dunque anche X_t è una tale combinazione lineare. E quindi, derivando covariantemente (4) e omettendo i termini in x, x_i, troviamo [1] in virtù delle stesse (4):

$$x_{rst} = \sum_{l,m} b_{rsl}\, A_{lm}\, a_{mt}\, X + \cdots = b_{rst}\, X + \cdots$$

Poichè, come dicemmo, $x_{rst} - x_{rts}$ è combinazione lineare delle x_i, dovrà essere $b_{rst} = b_{rts}$; poichè evidentemente anche $b_{rst} = b_{srt}$, il sistema delle b_{rst} sarà *covariante simmetrico*.

Dalla (1), ricordando (4), si trae:

$$B_{ir} = 2\Big[-\sum_{s,t} b_{ist}\, A_{ti}\, du_s\, F_2 + \sum_{s,t} b_{ist}\, A_{tr}\, du_s \sum_\sigma a_{r\sigma}\, du_\sigma\, du_i - \\ - \Sigma\, b_{rst}\, A_{tr}\, du_s\, F_2 + \Sigma\, b_{rst}\, A_{ti}\, du_s\, \Sigma\, a_{i\sigma}\, du_\sigma\, du_r\Big].$$

Trascurando gli ultimi due addendi, per costruire $F_3 = \Sigma' B_{ir}$ si deve estendere la Σ non solo alle coppie i, r con $i < r$, ma anche a quelle con $i > r$, e, se si vuole, anche a quelle con $i = r$, perchè per $i = r$ i primi due addendi si elidono. Così facendo e ricordando che da (4), (1) segue $\sum_{r,s} A_{rs}\, b_{rsl} = 0$, troviamo che:

$$F_3 = 2\, \Sigma\, b_{ist}\, du_i\, du_s\, du_t$$

cioè $b_{ist} = \Delta_{ist}$.

[1] Si devono qui ricordare i metodi di *calcolo assoluto* di Christoffel e di Ricci, e ricordare che dalle (4) segue che le b_{rst}, le c_{rs} formano come le a_{rs} dei sistemi *covarianti*.

Date le forme F_2, F_3 *le equazioni* (4) *restano determinate a meno dei coefficienti* c_{rs} *della* x. *Le* c_{rs} *legate dalla* $\sum_{r,s} A_{rs} c_{rs} = 0$ *sono i coefficienti della terza forma fondamentale della ipersuperficie* $\Sigma c_{rs} du_r du_s$ (che si può [loc. cit.] determinare completamente come F_2, F_3).

Osservazione. — Si noti che, posto $g = \sigma F_2$, $\overline{x} = \varrho x$, $\overline{y} = \varrho y$ ecc. il nuovo valore $\overline{F}_2$ di F_2 è $\frac{\varrho^{n+2}}{\sqrt{\sigma^n}} F_2$, che coincide con g se $\sigma = \varrho^2$; cioè, mutando F_2 in $\varrho^2 F_2$, ed x in ϱx e analoghe, tutte le formole precedenti rimangono invariate con nuovi valori per le X e le c_{rs} [1].

6. Dai precedenti risultati si deduce una nuova dimostrazione puramente *proiettiva* del teorema fondamentale: *Condizione necessaria affinchè due ipersuperficie* V_n, $\overline{V}_n$ *in corrispondenza biunivoca* (una luogo del punto $x, y, \ldots$, l'altra del punto $\overline{x}, \overline{y}, \ldots$, essendo le $x, y, \ldots, \overline{x}, \overline{y}, \ldots$ funzioni degli stessi parametri u_r) *siano proiettivamente applicabili in due punti omologhi* A, $\overline{A}$ *è che ivi si corrispondano le direzioni assintotiche* (le forme F_2, $\overline{F}_2$ per V e $\overline{V}$ siano in A, $\overline{A}$ proporzionali). *Se questa condizione è soddisfatta dappertutto* (per tutti i valori delle u_r), *la condizione non solo necessaria ma anche sufficiente per l'applicabilità in* A, $\overline{A}$ *è che ivi le* V, $\overline{V}$ *abbiano uguali elementi lineari* (le forme F_3, $\overline{F}_3$ siano nello stesso rapporto delle F_2, $\overline{F}_2$).

Per l'applicabilità in A, $\overline{A}$ si deve [2] poter trasformare $\overline{V}_n$ con una tale collineazione e scegliere le costanti ϱ, m, n, l in guisa che in A, $\overline{A}$ sia $\overline{x} = \varrho x$; $\overline{x}_i = \varrho(x_i + m_i x)$; $\overline{x}_{rs} = \varrho(x_{rs} + n_r x_s + n_s x_s + l_{rs} x)$ (ove le x_{rs} sono derivate *ordinarie*). Ne segue subito che in A, $\overline{A}$ le forme F_2, $\overline{F}_2$ differiscono per il solo fattore ϱ^n. Se per tutti i valori delle u le F_2, $\overline{F}_2$ sono proporzionali, noi possiamo trasformare proiettivamente $\overline{V}_n$ in guisa che

(1) Se non usiamo coordinate *normali* (loc. cit.), ciò che toglierebbe ogni indeterminazione, il fattore ϱ resta arbitrario; i simboli $\overline{\binom{rs}{t}}$ ed $\binom{rs}{t}$ di Christoffel di 2ª specie per $\overline{F}_2$, F_2 sono legati dalle

$$\overline{\binom{rs}{t}} = \binom{rs}{t} + \varepsilon_{rt} (\log \varrho)_s + \varepsilon_{st} (\log \varrho)_r - a_{rs} \sum_l A_{lt} (\log \varrho)_l$$

(dove $\varepsilon_{rr} = 1$ ed $\varepsilon_{rs} = 0$ per $r \neq s$). Le nuove derivate covarianti di $\overline{x} = \varrho x$ rispetto a $\overline{F}_2 = \varrho^2 F_2$ valgono $\varrho x_{rs} + a_{rs} \Sigma A_{hk} \varrho_h x_k + \frac{x}{\varrho} (a_{rs} \Delta_2 \varrho - 2\varrho_r \varrho_s + \varrho \varrho_{rs})$ ove x_{rs} sono le derivate di x rispetto F_2. Se ne deducono tosto i nuovi valori di $\overline{X} = \frac{1}{n} \Sigma \overline{A}_{rs} \overline{x}_{rs}$, delle c_{rs}, ecc.

(2) Cfr. la Mem. dell'A. nei Rend. del Circ. Mat. di Palermo, 1916 (§ 9).

sia identicamente $F_2 = \overline{F}_2$ e che in $A, \overline{A}$ sia $\overline{x} = x$, $\overline{x}_i = x_i$. Se nei punti $A, \overline{A}$ è in più $\overline{x}_{rs} = x_{rs} + n_r x_s + n_s x_r + l_{rs} x$ (formole che rimangono inalterate, se con x_{rs} indico derivate covarianti rispetto ad F_2), si calcolino le forme $F_3, \overline{F}_3$ per mezzo delle (1). Si trova che la loro differenza vale $2\Sigma(\overline{B}_{ir} - B_{ir})$ cioè $-2(\Sigma n_r du_r) F_2$, che, dovendo (come F_3 ed $\overline{F}_3$) essere apolare con F_2, è *nulla*. Cioè $F_3 = \overline{F}_3$ come dovevasi provare (e inoltre si trova $n_i = 0$). Viceversa, se $V, \overline{V}$ hanno la stessa forma F_2, e nei punti $A, \overline{A}$ le forme $F_3, \overline{F}_3$ sono uguali, si può trasformare proiettivamente $\overline{V}$ in guisa che in tali punti sia $\overline{x} = x, \overline{x}_i = x_i$; dalla identità $(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{rs}) = (x, x_1, \ldots, x_n, \overline{x}_{rs})$ segue che si potranno determinare delle costanti k in guisa che nei punti $A, \overline{A}$ sia $\overline{x}_{rs} = x_{rs} + \sum_t k_{rst} x_t + x k_{rs}$. Se ne deduce che:

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \Sigma A_{rs} \overline{x}_{rs} = X + kx + \Sigma k_t x_t \quad \text{(nel punto A)} \quad (k, k_t \text{ costanti}).$$

Sottraendo l'una dall'altra le equazioni differenziali per $x_{rs}, \overline{x}_{rs}$ se ne deduce infine: $\overline{x}_{rs} - x_{rs} = a_{rs} \sum_t k_t x_t + h_{rs} x$ $(h_{rs} = \text{cost.})$; (cosicchè la costante k_{rst} vale $a_{rs} k_t$) $(h_{rs} = k_{rs})$.

Se con una ulteriore collineazione che lasci fisso il punto $\overline{x}$ (cioè il punto $\overline{A}$), e il punto $\overline{A}_i$ di coordinate $(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \ldots, \overline{w}_i)$ per $i = 1, 2, \ldots, n$, portiamo il punto di coordinate $(\overline{X}, \overline{Y}$, ecc.) sulla retta che da A proietta il punto $(X, Y$, ecc.) renderemo $k_t = 0$, e quindi $\overline{x}_{rs} - x_{rs} = h_{rs} x$ (¹). Le due ipersuperficie saranno dunque proiettivamente applicabili in A. c. d. d.

Osservazione. — Nella prima parte della precedente dimostrazione si è ammesso che le $V, \overline{V}$ abbiano *dappertutto* uguali forme F_2, perchè dalla identità di queste forme nei soli punti $A, \overline{A}$ e dalle $\overline{x}_{rs} = x_{rs} + n_r x_s + n_s x_r + l_{rs} x$ in derivate ordinarie non si poteva dedurre che queste ultime uguaglianze valevano nei punti $A, \overline{A}$ anche in coordinate covarianti. Nell'ultima parte della dimostrazione la stessa ipotesi serve per passare viceversa da derivate covarianti a derivate ordinarie.

In una prossima Nota proveremo che:

1°) Come la forma F_2 risulta dallo studio della intersezione di V_n con l'iperpiano tangente, così si giunge alla F_3 studiando l'intersezione di V_n con le quadriche tangenti.

2°) Una V_n è per $n > 2$ proiettivamente indeformabile; fanno eccezione le V_n, il cui cono assintotico ha generatrici doppie; le quali sono tutte e sole le V_n inviluppo di ∞^r iperpiani con $r < n$. (Nella presente Nota si è studiato il caso $r = 1$).

(¹) Questa uguaglianza per le derivate covarianti rispetto a F_2 porta a una formola analoga per le derivate ordinarie (perchè $\overline{x}_i = x_i$).