ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 gennaio 1919.

F. D'Ovidio, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *ds^2 einsteiniani in campi newtoniani. IX. L'analogo del potenziale logaritmico.* Nota del Socio T. Levi-Civita.

Nella Nota precedente (¹) abbiamo assegnata un'ampia classe di ds^2 einsteiniani i cui coefficienti dipendono da due sole coordinate di spazio: ad ogni ordinario potenziale simmetrico $v(r, z)$ (r distanza dall'asse di simmetria Oz) corrisponde univocamente un ds^2 di tale classe. Un esempio meritevole di particolare attenzione si ha supponendo v indipendente da z, con che esso si riduce alla forma $h \log \frac{r}{r_0}$ (h, r_0 costanti) e conviene all'attrazione newtoniana dell'asse, supposto sede di una distribuzione lineare omogenea, od anche di un qualsiasi cilindro coassiale, indefinito, omogeneo (rispetto a cui il punto potenziato sia esterno), avente, per unità di lunghezza, la stessa massa della retta. Il relativo ds^2 einsteiniano appare interessante perchè determina rigorosamente l'influenza geometrica, meccanica ed ottica di un cilindro materiale.

Di ciò tratta la presente Nota; ed eccone le conclusioni.

Lo spazio circostante al cilindro non resta più euclideo, ma si atteggia a varietà normale di Bianchi con le tre curvature principali tutte distinte. Le coordinate cilindriche r, z, x_3 dello spazio euclideo, non perturbato dalla

(¹) In questi Rendiconti, vol. XXVII (2° semestre 1918), pp. 3-13.

presenza del cilindro, divengono (a cilindro ridotto e equilibrio ristabilito) coordinate curvilinee dello spazio distorto e ne costituiscono le linee principali di curvatura. Si può quindi dire — l'esiguità della distorsione rendendo espressiva la rappresentazione euclidea — che le linee principali di curvatura risultano dirette radialmente, assialmente, secondo il parallelo. Le curvature principali variano tutte in ragione inversa del quadrato della distanza (geodetica) dell'asse: quella corrispondente alle giaciture normali all'asse è di un ordine di grandezza inferiore alle altre due, e può trascurarsi di fronte ad esse che (nello stesso ordine di approssimazione) riescono eguali ed opposte.

La forza d'attrazione è tutta radiale (cioè diretta secondo la linea r, verso l'asse), come nella teoria ordinaria; però l'intensità non è rigorosamente proporzionale all'inversa della distanza (geodetica) dall'asse, bensì ad una potenza lievissimamente superiore a -1.

La velocità della luce V varia proporzionalmente a r^h (§ 4), ma, stante la piccolezza di h in eventuali esperienze di laboratorio (cfr. il § 6), non vi è da sperare, nemmeno coi mezzi odierni dell'ottica, di rendere questa variazione di V accessibile a controllo diretto.

1. — Richiami — Linee isometriche e loro proprietà generali.

Le soluzioni binarie esplicitate nella Nota precedente corrispondono a ds^2 statici del tipo

$$V_0^2 e^{2\nu} dl^2 - dl^2, \tag{1}$$

dove V_0 rappresenta una costante avente le dimensioni di una velocità, e il quadrato dell'elemento lineare di spazio ammette la forma canonica

$$dl^2 = e^{-2\nu} \{ e^{2\lambda}(dr^2 + dz^2) + r^2 dx_3^2 \} : \tag{2}$$

$\nu(r, z)$ designa un generico potenziale simmetrico, cioè un integrale particolare qualunque dell'equazione

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \nu}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} = 0, \tag{3}$$

e λ è subordinatamente definita, a meno di una costante additiva inessenziale [cfr. il § 4 della Nota prec.], dall'equazione ai differenziali totali

$$d\lambda = r(\nu_1^2 - \nu_2^2)\,dr + 2r\,\nu_1\nu_2\,dz \quad \left(\nu_1 = \frac{\partial \nu}{\partial r},\ \nu_2 = \frac{\partial \nu}{\partial z}\right). \tag{4}$$

Si deve limitarsi a valori positivi di r, mentre z e x_3 possono assumere valori reali qualisivogliono.

Per $\nu = 1$, λ si può ritenere eguale ad 1; il dl^2 appartiene allora allo spazio euclideo riferito a coordinate cilindriche r, z, x_3, quest' ultima interpretandosi evidentemente come azimut attorno all'asse Oz. Le linee x_3 ($r = \text{cost.}$, $z = \text{cost.}$) sono in questo caso i circoli paralleli.

Più generalmente, in corrispondenza ad un qualsiasi potenziale simmetrico $\nu(r, z)$, tutti i coefficienti del ds^2 conservano lo stesso valore lungo le linee x_3: chiamerò per ciò *isometriche* tali linee. Un'ovvia conseguenza di questo loro comportamento rispetto alla metrica spaziale (2) si è che ognuna ha la flessione costante. Per conseguirne la espressione esplicita, si ricorda:

1°) che la flessione Γ d'una linea x_3 è caratterizzata dai due coefficienti di rotazione γ_{133}, γ_{233} [1], essendo precisamente $\Gamma = \left| \sqrt{\gamma_{133}^2 + \gamma_{233}^2} \right|$;

2°) [cfr. Nota IV, § 2] che, per ogni dl^2 ternario della forma $\sum_1^3 {}_i\, e^{2\mathfrak{h}_i} dx_i^2$, si h

$$\gamma_{3i3} = - e^{-\mathfrak{h}_i} \frac{\partial \mathfrak{h}_3}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2),$$

γ_{313} potendosi anche risguardare [2] come curvatura geodetica della linea x_3 sopra la superficie $x_2 = \text{cost.}$ che la contiene; γ_{323} come analoga curvatura sopra la superficie $x_1 = \text{cost}$: l'una e l'altra prese con debito segno.

Con referenza a (2), ove si faccia corrispondere r ad x_1 e z ad x_2, si ha in particolare

$$\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2 = \lambda - \nu \quad , \quad \mathfrak{h}_3 = - \nu + \log r ,$$

e quindi

$$\gamma_{313} = - e^{\nu - \lambda} \left(\frac{1}{r} - \nu_1 \right) \quad , \quad \gamma_{323} = e^{\nu - \lambda} \nu_2 . \tag{5}$$

Dacchè tutto risulta indipendente da x_3, rimane acquisito che ogni linea isometrica è dotata di flessione costante.

Prendiamo in considerazione una generica superficie $z = \text{cost.}$ Il quadrato del suo elemento lineare è, in base alla (2),

$$e^{2(\lambda - \nu)} dr^2 + e^{-2\nu} r^2 dx_3^2 .$$

I coefficienti di dr^2 e di dx_3^2 (avendo ormai z un valore costante) dipendono esclusivamente da r; perciò le linee r ($x_3 = \text{cost}$) sono geodetiche, e le linee x_3, cioè *le linee isometriche, oltre ad avere curvatura geodetica costante, sono* — secondo la definizione del Bianchi [3] — *circoli geo-*

(1) Ricci et Levi-Civita, *Méthodes* etc., Math. Ann., B. 54, 1900, pag. 154.

(2) Bianchi, *Lezioni di geom. differenziale*, vol. I [Pisa, Spoerri, 1902], pp. 179-181.

(3) Loc. cit., pag. 196.

detici delle superficie $z = \text{cost.}$ La loro distanza geodetica ϱ dal centro, o circolo singolare, $r = 0$ è

$$\varrho = \int_0^r e^{\lambda - \nu}\, dr\,, \tag{6}$$

il limite superiore dell'integrale essendo il valore di r, che spetta all'isometrica di cui si tratta, e dovendosi, ben si intende, risguardare la z (che comparisce pel tramite di $\lambda - \nu$) costante col valore che spetta alla stessa isometrica.

2. — Potenziali logaritmici — Più stretta analogia delle linee isometriche coi circoli paralleli dello spazio ordinario — Distanza dall'asse — Flessione.

Occupiamoci in particolare dei potenziali logaritmici, cioè di quelle soluzioni della (3), che non dipendono da z. Si ha per essi, designando con h una costante arbitraria,

$$\nu_1 = \frac{h}{r} \quad , \quad \nu_2 = 0\,, \tag{7}$$

e quindi, designando con r_0 una seconda costante,

$$\nu = h \log \frac{r}{r_0}\,. \tag{7'}$$

La funzione ν, per tutti i ds^2 della classe (1), si risguarda dotata di dimensioni nulle; r è una lunghezza. Perciò il prodotto $r\nu_1$ è un puro numero, e con esso la costante h. Dalla (7'), che equivale a $\frac{r}{r_0} = e^{\frac{\nu}{h}}$, risulta ulteriormente che r_0 ha le dimensioni di una lunghezza.

La (4), coi valori (7), porge

$$\lambda_1 = \frac{\partial \lambda}{\partial r} = \frac{h^2}{r} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0\,, \tag{8}$$

donde, a meno di una inessenziale costante additiva,

$$\lambda = h^2 \log \frac{r}{r_0}\,. \tag{8'}$$

La circostanza che, nell'espressione (2) del dl^2 (senza termini rettangoli in dz), tutti i coefficienti sono, nel caso attuale, indipendenti da z, permette di affermare che *le superficie* $z = \text{cost.}$ *sono piani geodetici*: basta aver riguardo alle equazioni lagrangiane delle geodetiche. Le linee isometriche $x_3 = \text{cost.}$ hanno così non soltanto la flessione costante, ma anche le altre caratteristiche degli ordinari circoli paralleli attorno all'asse Oz, essendo circoli geodetici dei piani, pure geodetici, $z = \text{cost.}$

Dacchè ogni geodetica di tali piani lo è altresì rispetto allo spazio ambiente, *la ϱ definita dalla* (6) *rappresenta la minima distanza d'una generica isometrica dall'asse* (superficie singolare) $r=0$, *il minimo riferendosi a tutte le linee spaziali* (non soltanto a quelle che appartengono alla stessa superficie $z=\text{cost.}$, cui conviene limitarsi quando ν dipende anche da z).

Ove si ponga per brevità

$$n-1=h^2-h\,, \tag{9}$$

si ha, per qualsiasi valore reale di h,

$$n=h^2-h+1=(h-{}^1/_2)^2+{}^3/_4>0\,;$$

inoltre, dalle (7') e (8'),

$$e^{-\nu}=\left(\frac{r_0}{r}\right)^h \quad , \quad e^{\lambda-\nu}=\left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1}. \tag{10}$$

Dacchè $n>0$, la funzione r^{n-1} è integrabile a partire da $r=0$, come si richiede perchè abbia senso la distanza ϱ dall'asse. In modo preciso risulta

$$\varrho=\frac{r^n}{nr_0^{n-1}}. \tag{11}$$

La curvatura geodetica d'una linea isometrica (nel piano $z=\text{cost.}$ cui essa appartiene) è espressa dalla prima delle (5). Si può anzi aggiungere che γ_{313} ci dà la detta curvatura presa positivamente quando la concavità della curva è rivolta nel senso delle r crescenti, negativamente nel caso opposto. *Se si vuole rispecchiare la condizione qualitativa che i circoli geodetici sieno concavi verso il centro* ($r=0$), *bisognerà ritenere* $\gamma_{313}<0$. Ora si ha da (5), (7) e (10)

$$\gamma_{313}=-(1-h)\frac{r_0^{n-1}}{r^n}\,,$$

donde la disuguaglianza

$$h<1\,. \tag{12}$$

D'altra parte la flessione Γ (annullandosi γ_{323}) coincide col valore assoluto di γ_{313}. Possiamo quindi ritenere, esprimendo r per ϱ a norma della (11),

$$\Gamma=\frac{1-h}{n}\frac{1}{\varrho}\,. \tag{13}$$

3. — Curvature e direzioni principali dello spazio corrispondenti ad un potenziale logaritmico.

Dal § 6 della Nota precedente risulta che le linee isometriche sono, per qualsiasi potenziale simmetrico $\nu(r, z)$, linee principali di curvatura. La corrispondente curvatura principale ω_3 vale

$$\omega_3 = e^{-2(\lambda-\nu)} \nabla^0 \left(\nu - \log \frac{r}{r_0}, \nu\right),$$

il parametro misto ∇^0 riferendosi alla forma euclidea $dr^2 + dz^2$.

Per il potenziale logaritmico si ha in conformità, dalle (10), (7), (9) e (11),

$$\omega_3 = (n-1)\frac{r_0^{2(n-1)}}{r^{2n}} = -\frac{1-n}{n^2}\frac{1}{\varrho^2}. \tag{14}$$

Le altre due curvature principali dipendono dai simboli di Ricci α_{11}, α_{12}, α_{22}. Le loro espressioni generali si trovano esplicitate nella Nota precedente. Senza richiamarle materialmente, basterà ora procurarsi i valori delle α_{ik} forniti dalle formule (24) di detta Nota.

Sostituendo in queste formule, per le derivate covarianti ν^0_{ik}, da riferirsi alla forma euclidea $dr^2 + dz^2$, le derivate ordinarie, e tenendo conto che a^0_{ik} sono i coefficienti (1 o 0) della forma suddetta, si ha, per le (7), (8) e (9),

$$\alpha_{11} = \frac{h}{r^2} + \frac{2h^3 - 3h^2}{r^2} + \frac{(h-h^2)\,h}{r^2} = \frac{(1-h)(1-n)}{r^2};$$

$$\alpha_{12} = 0 \quad ; \quad \alpha_{22} = \frac{(h-h^2)\,h}{r^2} = \frac{h(1-n)}{r^2}.$$

L'annullarsi di α_{12} sta ad indicare che *le linee coordinate r e z sono, al pari delle x_3, linee principali di curvatura.* E le rispettive curvature principali ω_1 e ω_2 si hanno in conformità dividendo α_{11} e α_{22} per i coefficienti di dr^2 e di dz^2 nel dl^2, cioè per $e^{2(\lambda-\nu)} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2(n-1)}$. Con ciò, tenendo conto della (9), risulta

$$\omega_1 = \frac{(1-h)(1-n)}{n^2}\frac{1}{\varrho^2} \quad , \quad \omega_2 = \frac{h(1-n)}{n^2}\frac{1}{\varrho^2}, \tag{15}$$

annullandosi, come deve sempre accadere negli spazî vuoti, la curvatura media $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$. Dalle (14) e (15) apparisce che *le tre curvature principali sono distinte* (circostanza già rilevata in generale alla fine della Nota precedente); *e tutte inversamente proporzionali al quadrato della distanza geodetica dall'asse.*

4. — Potenziale statico — Forza del campo.

Designando al solito con V^2 il coefficiente di dt^2 nel ds^2 einsteiniano, si ha da (1) e (7')

$$V^2 = V_0^2 e^{2\nu} = V_0^2 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2h},$$

donde il potenziale statico $-\frac{1}{2}V^2$. Questo è funzione della sola r; quindi *la forza è tutta radiale* (si intende diretta secondo le linee r). L'elemento d'arco delle linee r essendo $e^{\lambda-\nu}\,dr$, ossia, a norma della (10), $\left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1} dr$, si ha, per la componente della forza nel senso delle r crescenti,

$$-\frac{1}{2}\frac{dV}{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1} dr} = -V_0^2\, h\, \frac{r_0^{n-1}}{r^n}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2h}.$$

Dacchè tale componente è negativa, la forza è diretta *verso l'asse*; mettendo in evidenza la distanza geodetica a norma della (11), si ha per l'intensità F l'espressione

$$\text{(16)}\qquad F = V_0^2 \frac{h}{n}\cdot\frac{1}{\varrho}\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\frac{2h}{n}},$$

dove

$$\text{(17)}\qquad \varrho_0 = \frac{r_0}{n}$$

designa evidentemente la distanza geodetica per $r = r_0$.

La (16) mostra che la forza varia proporzionalmente alla potenza $-1 + \frac{2h}{n}$ della distanza geodetica dall'asse.

5. — Prima approssimazione.

Ricordo dalla Nota I [1] (§ 8) che, in prima approssimazione, il ds^2 che conviene ad un campo newtoniano di potenziale $-V_0^2\gamma$, dove V_0 rappresenta la velocità della luce in quei posti del campo in cui $\gamma = 0$ [2], ha la forma

$$\text{(18)}\qquad V_0^2(1 + 2\gamma)\,dt^2 - (1 - 2\gamma)\,dl_0^2$$

con dl_0 euclideo.

[1] In questi Rendiconti, vol. XXVII (2° sem. 1917), pp. 307-317.

[2] A vero dire, nella citata Nota I, si fa l'ipotesi specifica che γ si annulli all'∞ e che ivi la velocità della luce V_0 abbia il valore c che le compete in assenza d'ogni circostanza perturbatrice.

Dalle (1) e (2) apparisce che, in corrispondenza ad un generico potenziale simmetrico $\nu(r, z)$, il ds^2 rientra nel tipo (18), purchè ν (che è un puro numero) si possa trattare come una piccola quantità del prim'ordine, e λ riesca addirittura trascurabile. In tale ipotesi infatti

$$e^{2\nu} = 1 + 2\nu \quad , \quad e^{2(\lambda-\nu)} = 1 - 2\nu ;$$

e si ha da (2)

$$dl^2 = (1 - 2\nu)(dr^2 + dz^2 + r^2\, dx_3^2),$$

il secondo fattore costituendo appunto un dl_0^2 euclideo (riferito a coordinate cilindriche) donde, per (1),

$$ds^2 = V_0^2(1 + 2\nu)\, dt^2 - (1 - 2\nu)\, dl_0^2 .$$

La coincidenza colla (18) è manifesta, purchè *si identifichi* ν *con* γ *e* V_0 *col valore della velocità della luce* per $\nu = 0$, il che è quanto dire, badando alla (7'), *per* $r = r_0$.

6. — Attrazione di un cilindro omogeneo.

Se si prende per ν il potenziale logaritmico $h \log \frac{r}{r_0}$, la condizione che tale quantità possa considerarsi piccola di prim'ordine è evidentemente soddisfatta le quante volte sia tale la costante h (che, in virtù della (12), è in ogni caso una frazione propria): ciò, ben si intende, purchè r sia abbastanza discosto da 0 e ∞ da poter trattare $\log \frac{r}{r_0}$ come quantità finita. Sotto queste stesse ipotesi $\lambda = h^2 \log \frac{r}{r_0}$ risulta senz' altro trascurabile, come si richiede per l'applicabilità delle formule di prima approssimazione.

Ciò posto, riportiamoci agli elementi della teoria dell'attrazione newtoniana. Un cilindro circolare, indefinito, omogeneo, agisce nei punti esterni come se tutta la massa fosse distribuita uniformemente sull'asse con la stessa densità μ per unità di lunghezza. Detta r la distanza dall'asse e f la costante d'attrazione, si ha il potenziale

$$2f\mu \log \frac{1}{r} + \text{cost.}$$

Specificando la inessenziale costante additiva, si può ritenere per tale potenziale l'espressione

$$2f\mu \log \frac{r_0}{r},$$

che diviene manifestamente identificabile con

$$- V_0^2 \nu = V_0^2 h \log \frac{r_0}{r} ;$$

basta assumere

(19) $$h = \frac{2f\mu}{V_0^2}.$$

A V_0 si può, senza errore sensibile, sostituire il valore limite c. Si ha quindi, in unità C. G. S.,

$$V_0 = c = 3 \,.\, 10^{10} \quad , \quad f = 6{,}7 \,.\, 10^{-8},$$

e ciò porge

(19') $$h = 2\,\frac{6{,}7}{9}\, 10^{-28}\mu,$$

la densità lineare μ dovendosi ritenere espressa in grammi per centimetro. Di qua si rileva intanto che, per ogni distribuzione realizzabile con masse ordinarie, è esuberantemente verificata l'ipotesi preliminare che h si possa trattare come quantità di prim'ordine. Sotto tale ipotesi, si ha dalla (9) $n = 1 - h$; e, sempre a meno di termini di secondo ordine, $\frac{h}{n}$ si riduce ad h. In conformità l'espressione (16) della forza, tenuto conto della (19), assume l'aspetto

$$\frac{2f\mu}{\varrho}\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{2h}.$$

Il primo fattore corrisponde evidentemente all'attrazione newtoniana esterna di un cilindro omogeneo (dello spazio euclideo) alla distanza ϱ dall'asse. Il secondo fattore (assai prossimo all'unità) $\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{2h}$ costituisce la *correzione statica* dovuta alla teoria di Einstein. L'alterazione geometrica dello spazio ambiente, già esplicitata in generale a § 3, dà luogo, trascurando nelle (15) e (16) i termini di secondo ordine in h, ai seguenti valori delle curvature principali:

$$\omega_1 = -\frac{h}{\varrho^2} \quad , \quad \omega_2 = 0 \quad , \quad \omega_3 = \frac{h}{\varrho^2}.$$

Dacchè ω_1, ω_2, ω_3 appartengono rispettivamente alle giaciture $r = \text{cost.}$, $z = \text{cost.}$, $x_3 = \text{cost.}$, si conclude che, nella distorsione dello spazio, provocata dalla presenza di un cilindro materiale (circolare, indefinito, omogeneo), la curvatura riemanniana resta nulla nelle giaciture normali all'asse, mentre assume il valore positivo $\frac{h}{\varrho^2}$ per le giaciture meridiane, e il valore opposto $-\frac{h}{\varrho^2}$ per le giaciture tangenti ai cilindri coassiali.