ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

« Le ricerche del Sabatini intorno ai Vulcani Cimini sono a mio pa-
« rere, consegnate in un lavoro di grande pregio, il cui valore sta soprattutto
« nell'esame particolareggiato, multiforme e straordinariamente completo del
« piccolo territorio interessantissimo dei vulcani dell'Italia centrale. La de-
« terminazione esatta dell'età e della successione delle singole eruzioni, le
« ricerche eseguite con minuziosa cura, petrografiche e chimiche, dei singoli
« prodotti delle due bocche eruttive ciminiche, offrono senza alcun dubbio
« un materiale copioso per comprendere le relazioni genetiche e magmatiche
« bene precisate delle rispettive rocce, e per costruire il vero meccanismo
« eruttivo, se mai questo sarà possibile un giorno ».

« Le nuove eccellenti osservazioni geologiche e petrografiche del Saba-
« tini dànno al suo lavoro un alto e duraturo valore, e i rispettivi risultati
« rimarranno acquisiti alla scienza ».

« Io non credo si possa dare oggi una spiegazione in certo modo plau-
« sibile delle relazioni di analogia fra i prodotti eruttivi di due piccoli
« vulcani. Ma per ciò che riguarda il valore della presente opera, poco
« monta se l'autore nell'ultimo capitolo traccia (in relazione con una ipotesi
« di Michel Levy) un tentativo in questo senso, a cui non posso associarmi.
« Comunque sia di ciò, il lavoro del Sabatini mantiene tutto il suo pregio,
« grazie alla lucidità, con la quale è tessuta l'intera storia delle eruzioni
« dell'interessante regione vulcanica ».

Finalmente è degno di essere rilevato l'accordo tra le osservazioni sul terreno, le analisi chimiche e la parte fondamentale della classificazione magmatica come risulta dal diagramma della tav. XVI. Da essa si vede che le rocce dei Cimini formano una *provincia petrografica* al pari di quelle dei Laziali, della Tolfa e dell'Amiata; e noterò ancora l'esattezza della carta geologica da me controllata in alcune escursioni fatte appositamente.

Matematica. — *A proposito di una Nota del sig. A. Vergerio.* Nota di LEONIDA TONELLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

Il sig. A. Vergerio, nella sua Nota *Sulla derivazione per serie* (1), ha voluto occuparsi di alcuni risultati da me stabiliti nelle Note: *Successioni di curve e derivazione per serie*, pubblicate nei Rendiconti di questa illustre Accademia (2).

(1) Rend. della R. Acc. dei Lincei, 1916, 2° sem., pp. 65-68. La pubblicazione di questa Nota è avvenuta quando io ero già alla fronte, a compiere il mio dovere di cittadino e di soldato. Dalla fronte torno soltanto ora, per riprendere l'insegnamento e quindi anche gli studî da lungo tempo abbandonati; e soltanto ora prendo visione del lavoro del sig. Vergerio. Ciò spiega il ritardo con cui escono questi miei rilievi.

(2) 1916, 1° sem., pp. 22-30 e 85-91.

Egli scrive, a pag. 65, che io sarei riuscito « a dimostrare (sono parole sue) un teorema che può enunciarsi così:

Supposto:

1°) *che la* $\sum_1^\infty n_n(x)$ *converga in* (a, b), *quasi dappertutto verso una funnione* $n(x)$;

2°) *che tanto la* $n(x)$ *quanto la* $n_n(x)$ *siano funzioni a variazione limitata nel detto intervallo;*

3°) *che la serie delle derivate (considerate là dove esistono)* $\sum_1^\infty n'_n(x)$ *sia quasi dappertutto convergente;*

sarà, quasi dappertutto, $n'(x) = \sum_1^\infty n'_n(x)$ ».

Aggiunge poi, in nota a piè della pag. 66: « Il Tonelli nella Nota II (*Successioni di curve* ecc.) s'era proposto di dimostrare che la 3ª condizione posta nel suo teorema è affatto superflua perchè conseguenza delle altre due; che si può cioè prescindere dall'ipotesi sulla convergenza delle serie derivate. Il suo teorema però, così modificato, cessa di essere vero; per convincersene, basta ricordare il classico esempio di Abel: la serie

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_1^\infty \frac{\sin nx}{n}$$

soddisfa alle condizioni 1ª e 2ª del suo teorema; ciò nondimeno, la serie delle derivate $\sum_1^\infty \cos nx$ è divergente! »

Questo è quanto scrive il sig. Vergerio; e il lettore potrà per soprappiù osservare che non è vero neppure il teorema di cui sopra ho riportato l'enunciato e che il sig. Vergerio ritiene esatto [1].

Se non che è assolutamente falso che io abbia tentato di dimostrare ed anche semplicemente che io abbia enunciate le proposizioni che il sig. Vergerio mi attribuisce.

[1] Basta, infatti, considerare il seguente esempio. Sia la funzione $n_n(x)$ definita nel seguente modo:

$$n_n(x) = \frac{r-1}{n} \quad \text{nell'intervallo} \quad \frac{r-1}{n} \le x < \frac{r}{n} \quad (r = 1, 2, \dots, n),$$

$$n_n(x) = 1 \quad \text{per} \quad n = 1.$$

È evidente: 1°) che la funzione $n_n(x)$ converge uniformemente, su tutto l'intervallo $(0, 1)$, verso la funzione $n(x) = x$; 2°) che tanto la $n(x)$ quanto la $n_n(x)$ sono funzioni a variazione limitata in $(0, 1)$; 3°) che la derivata $n'_n(x)$ esiste quasi dappertutto ed è uguale a zero, e che pertanto $n'_n(x)$ converge quasi dappertutto, per $n \longrightarrow \infty$, allo zero; 4°) che, ciò nondimeno, essendo sempre $n'(x) = 1$, la $n'_n(x)$ *non converge* quasi dappertutto, per $n \longrightarrow \infty$, alla $n'(x)$.

I due teoremi da me *veramente enunciati e dimostrati* (e che nessuno ancora ha mostrato non esser veri) sono i seguenti:

a) *Supposto:*

1°) *che la successione di funzioni, date su* (a, b), $n_1(x)$, $n_2(x)$, ... $n_n(x)$, ... *converga quasi dappertutto verso una funzione* $n(x)$;

2°) *che la lunghezza della curva* $y = n_n(x)$ *tenda a quella, supposta finita, di* $y = n(x)$;

3°) *che la successione delle derivate (considerate là dove esistono)* $n'_1(x)$, $n'_2(x)$, ..., $n'_n(x)$, ... *sia quasi dappertutto convergente;*

è quasi dappertutto $\lim\limits_{n \to \infty} n'_n(x) = n'(x)$ [loc. cit. (²), pag. 22].

b) *Se la successione di funzioni* $n_1(x)$, $n_2(x)$, ..., $n_n(x)$, ..., *date in* (a, b), *converge quasi dappertutto verso una funzione* $n(x)$; *se, inoltre, la lunghezza, supposta finita, della curva* $y = n_n(x)$ *tende a quella, pure finita, di* $y = n(x)$; *allora la successione delle derivate* $n'_1(x)$, $n'_2(x)$, ..., $n'_n(x)$, ..., *considerate solamente là dove esistono, converge in misura verso la derivata* $n'(x)$ [loc. cit. (²), pag. 85].

Confrontando questi enunciati con quelli che mi attribuisce il sig. Vergerio, risulta che il detto signore ha sostituito alla condizione:

« che la lunghezza della curva $y = n(x)$ tenda a quella, supposta finita, della $y = n(x)$ »;

l'altra:

« che tanto la $n(x)$ quanto la $n_n(x)$ siano funzioni a variazione limitata ».

Ora tutti sanno che queste due condizioni *non sono equivalenti*, perchè la seconda può essere soddisfatta senza che lo sia la prima. Ed ecco perchè le due proposizioni da me dimostrate vengono trasformate dal sig. Vergerio in due altre non vere.

Osservo inoltre che, a proposito del teorema *b*), il sig. Vergerio ha anche sostituito la *convergenza*, della $n'_n(x)$ alla $n'(x)$, alla *convergenza in misura*; ed è ben noto che ciò è tutt'altro che lecito.