ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 febbraio 1919.

A. Ròiti, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Sopra certi problemi dinamici sul piano.* Nota II di A. Del Re, presentata dal Socio V. Volterra.

1. Nella precedente Nota (¹) relativa all'argomento di cui nel titolo, mi occupai dei problemi dinamici sul piano cui può competere un integrale frazionario a termini lineari nelle componenti x', y' della velocità del punto (x, y), nella supposizione del Bertrand secondo la quale (col linguaggio delle convenzioni e definizioni stabilite in quella Nota, e che seguiremo qui, senz'altro aggiungere), nel determinante H dell'omografia *coordinata* a quell'integrale, le due prime orizzontali g, k, l ; g', k', l' non siano composte di elementi proporzionali (²); mettendo in rilievo non dovere essere, per la giustezza delle nostre conclusioni, in alcun modo degenere quell'omografia, cioè non dovere, in alcun modo essere $H = 0$. Questa condizione di cose portò seco che *non si poterono identificare tutti i problemi cui si riferisce l'integrale supposto con tutti i problemi di moti liberi per sezioni coniche, e per forze centrali, o parallele*; poichè ne rimasero esclusi *quelli per parabole sotto l'azione di forze costanti in grandezza e direzione* (es., cadute dei gravi lanciati in un campo gravitazionale newtoniano), e *quelli per una conica qualunque sotto l'azione di forze dirette verso*

(¹) Cfr. questi medesimi Rend., vol. XXVIII, 1° sem., 1919, pag. 65.

(²) Cfr. la Memoria, *Sur quelques-unes des formes* etc., Liouville, 2ª serie, tomo II, pag. 136; e pag. 137, form. (4), (5) e segg.

un punto della curva, proporzionate direttamente alla distanza da esso ed inversamente al cubo della distanza dalla tangente nel punto. E questi ultimi problemi costituiscono effettivamente un gruppo a parte nei riguardi del dato integrale, poichè possono riguardarsi come aggregati a quei primi soltanto in quantochè l'integrale stesso, verificandosi il caso escluso dal Bertrand, viene a prendere la *forma intiera*, e, come tale, a confondersi con l'*integrale delle aree*, comune a tutti i moti per forze centrali (in caso limite, per forze parallele); ed in quantochè, anche essi presentano, nella loro totalità, il carattere d'*invarianza* rispetto a tutte le collineazioni di Appell del piano.

2. Nel caso escluso dal Bertrand, adoperando le medesime notazioni di lui, l'integrale dato può porsi nella forma

$$(1)\qquad \alpha = [(k + lx)\,y' + (g + mly)\,x' + \mathrm{R}] \times \times [(k' + l'x)\,y' + (g' + ml'y)\,x' + \mathrm{C}]^{-1},$$

m essendo un numero scelto a piacere. Allora, posto

$$(2)\qquad g' : g = k' : k = l' : l = \varrho\,,$$

si avrà

$$(1')\qquad \varrho\alpha = [(k + lx)\,y' + (g + mlx)\,x' + \mathrm{R}] \times \times \left[(k + lx)\,y' + (g + lmx)\,x' + \frac{\mathrm{C}}{\varrho}\right]^{-1};$$

d'onde, indicando ancora con α la nuova costante $\dfrac{1}{2\varrho}\,\dfrac{\varrho\alpha + 1}{\varrho\alpha - 1}$, e ponendo

$$\frac{\nu}{\mathrm{R}\varrho - \mathrm{C}} = \nu_1 \quad (\nu = g\,, k\,, l) \quad , \quad \frac{\mathrm{R}\varrho + \mathrm{C}}{\mathrm{R}\varrho - \mathrm{C}} = \mathrm{R}_1 :$$

$$(3)\qquad \alpha = (k_1 + l_1 x)\,y' + (g_1 + ml_1 y)\,x' + \mathrm{R}_1$$

l'integrale viene ad avere la forma intiera. Da quanto venne stabilito dallo stesso Bertrand [loc. cit., pag. 115, form. (3)], si ricava dopo brevi calcoli che dovrà essere, insieme ad $\mathrm{R}_1 = \text{cost.}$,

$$\frac{\partial}{\partial x}(g_1 + ml_1 y) = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}(k_1 + l_1 x) = 0\,,$$

il che implica $\mathrm{R}\varrho - \mathrm{C} = \text{cost.}$ (e conseguentemente pure $\mathrm{R}\varrho + \mathrm{C} = \text{cost.}$) e

$$\frac{\partial(g_1 + ml_1 y)}{\partial y} + \frac{\partial(k_1 + l_1 x)}{\partial x} = 0\,,$$

ciò che dà

$$(4)\qquad (m + 1)\,l = 0$$

dovendo essere esclusa la scelta $\varrho = \mathrm{C} : \mathrm{R}$ che trasformerebbe il 2° membro della (1′) nella costante 1. La (4) richiede che sia $m = -1$, ovvero $l = 0$. Per $l = 0$, le (2) informano che deve essere anche $g = k = 0$, ed allora, scrivendo ancora α al posto di $l : \alpha$, in luogo della (1) troviamo

$$\alpha = (k' + l'x)\,y' + (g' - l'x)\,x' + R'_1\,, \tag{3'}$$

cioè un integrale della forma (3) senza che la condizione $l' = 0$ porti seco $k' = g' = 0$.

Possiamo dunque supporre che alla (4) si soddisfi soltanto con $m = -1$, ed allora ne deduciamo che *la condizione* $m = -1$ *è pure necessaria quando si verifichi il caso escluso dal Bertrand* (cosa che questi non rilevò), a proposito della discussione delle form. (5) e seg. al § VIII della sua Mem. cit. Sicchè, a parte il fatto che le (3), (3′) già dicono trattarsi del noto *integrale delle aree* [e di forze centrali verso il punto ($x_0 = g_1 : l_1 = g : l$; $y_0 = -k_1 : l_1 = -k : l$) se $l \neq 0$, di forze centrali verso il punto ($x'_0 = -k' : l'$, $y'_0 = g' : l'$) se $l = 0$, $l' \neq 0$, o di forze parallele nella direzione $-g' : k'$ se, con $l = 0$, è $l' = 0$], noi dobbiamo ritrovare questo risultato come conseguenza dell'altro nel quale l'annullarsi di H non sia conseguenza della proporzionalità fra gli elementi delle sue due prime orizzontali.

3. Ritenuto ora $H = 0$ con esclusione delle (2), per l'integrale dato si avrà la forma

$$\alpha = [(k + lx)\,y' + (g - ly)\,x' + \lambda]\,[(k' + l'x)\,y' + (g' - l'y) + \mu]^{-1}, \tag{5}$$

dove λ , μ sono, rispettivamente, le costanti di proporzionalità fra i minori complementari degli elementi della seconda e della prima orizzontale di H ed i minori complementari della terza. In fatti, riferendosi alle espressioni per R, C riportate nella Nota I [cfr. form. (3)], poichè $G' = \lambda G''$, ... , $G = \mu G''$, ... , si trova per R (ed in modo analogo per C]:

$$R = \lambda(G''y - K''x + L'')\,(G''y - K''x + L'')^{-1} = \lambda\,,$$

e, per le componenti X , Y delle forze, le equazioni

$$\left\{\begin{aligned} &(G''y - K''x + L'')\,X = 0 \quad , \quad (G''y - K''x + L'')\,Y = 0 \\ &[\lambda(l'y - g') - \mu(ly - g)]\,X - [\lambda(l'x + k') - \mu(lx + k)]\,Y = 0 \end{aligned}\right. \tag{6}$$

che, nelle condizioni supposte di esclusione delle (2), restano soddisfatte soltanto dai valori $X = 0$, $Y = 0$; ciò che corrisponde al caso ovvio di *moti senza forze sollecitatrici*, vale a dire di *moti rettilinei ed uniformi*. L'integrale (5), mettendo al posto di x' , y' le componenti della velocità iniziale diventa la equazione della retta che rappresenta la traiettoria del mobile.

Se introduciamo le condizioni (2), per essere allora $G'' = K'' = L'' = 0$, le prime due delle (6) restano soddisfatte per qualsiasi valore delle X, Y, mentre la terza dà, se non è $l = 0$:

$$(\lambda\varrho - \mu)[(ly - g)X - (lx + k)Y] = 0 \quad , \quad \text{e se } l = 0,$$
$$(\lambda - \mu\varrho)[(l'y - g')X - (l'x + k')Y] = 0 .$$

Perciò, tenuto conto che non può essere nè $\varrho = \mu : \lambda$, nè $\varrho = \lambda : \mu$, si avrà

$$(7) \quad \begin{cases} (ly - g)X - (lx + k)Y = 0 & \text{se non è } l = 0 \\ (l'y - g')X - (l'x + k')Y = 0 & \text{se con } l = 0, \text{ non è } l' = 0 \\ g'X + k'Y = 0 & \text{se con } l = 0 \text{ è } l' = 0 ; \end{cases}$$

ciò che concorda con quanto venne detto in fine del n. 2. Tutti i casi possibili restano così esaminati.

4. Se con la omografia di Appell (di det. $\varDelta = \pm \Sigma ab'c'' \neq 0$)

$$(8) \quad \begin{cases} x_1 = (ax + by + c)(a''x + b''y + c'')^{-1} , \\ y_1 = (a'x + b'y + c')(a''x + b''y + c'')^{-1} , \\ k\,dt_1 = (a''x + b''y + c'')^{-2}\,dt \end{cases}$$

trasformano un movimento sotto l'azione della forza di componenti X, Y troviamo, come Appell ha stabilito, un movimento sotto l'azione della forza di componenti X_1, Y_1 (pure esse dipendenti, come si suppone per le X, Y, soltanto dalla posizione del mobile) date (quando siano A, ... ; A', ... i min. compl. di a, ... ; a', ... in $\varDelta$) dalle

$$(9) \quad \begin{cases} X_1 = k^2(a''x + b''y + c'')^2[\quad C'(xY - yX) + B'X - A'Y] \\ Y_1 = k^2(a''x + b''y + c'')^2[- C(xY - yX) - BX + AY] ; \end{cases}$$

ovvero, grazie alle formule inverse delle (8) dopo brevi trasformazioni con applicazione del teorema sui minori del det. reciproco di un determ. dato

$$(10) \quad \begin{cases} X_1 = \dfrac{-k^2\varDelta^3}{(Cx_1 + C'y_1 + C'')^3}[(a''X + b''Y)x_1 - (aX + bY)] \\ Y_1 = \dfrac{-k^2\varDelta^3}{(Cx_1 + C'y_1 + C'')^3}[(a''X + b''Y)y_1 - (a'X + b'Y)] \end{cases}$$

dove sono ancora da esprimersi in funzione delle x_1, y_1, le X, Y. Da esse si vede che, ove introduciamo il punto

$$x_0 = (aX + bY)(a''X + b''Y)^{-1} \quad , \quad y_0 = (a'X + b'Y)(a''X + b''Y)^{-1},$$

questo appartiene alla retta limite $Cx_1 + C'y_1 + C'' = 0$ del sistema trasformato, poichè, evidentemente

$$Cx_0 + C'Y_0 + C'' =$$
$$= [(aC + a'C' + a''C'')\,X + (bC + b'C' + b''C'')\,Y]\,(a''X + b''Y)^{-1} = 0\,;$$

epperò, ove X, Y siano le componenti d'una forza costante in grandezza e direzione, le X_1, Y_1 saranno le componenti d'una forza centrale col centro nel punto x_0, y_0, proporzionale alla distanza dal centro, ed inversamente proporzionale al cubo della distanza dalla retta $Cx_1 + C'y_1 + C'' = 0$ che passa per esso. Questa retta e quel punto sono, rispettivamente una tangente ed il relativo punto di contatto della conica trasformata della parabola percorsa dal punto mobile sotto l'azione della forza costante. Così, tenuto conto che dalle (10) con la omografia inversa delle (8) si passa di nuovo alle X, Y, nella supposizione che queste siano costanti, si arriva al risultato secondo il quale *a tutti i moti liberi su coniche, per forze centrali col centro in un punto della curva, o per forze di direzione e grandezza costante, si arriva, partendo da uno qualunque di essi, col trasformarlo per mezzo delle omografie di Appell.* E da ciò segue, allora, il carattere d'*invarianza*, per questi tipi di moti liberi, cui si è accennato in fine del n. 1.

5. Tutto quanto abbiamo esposto, in questa e nella precedente Nota, facile è riassumere in un enunciato unico che noi, per brevità, lasciamo a cura del lettore.

Matematica. — *Sul problema dell'irriducibilità di un'equazione in un campo di razionalità generale.* Nota di PACIFICO MAZZONI, presentata dal Socio L. BIANCHI.

1. Nella teoria che Galois pose a fondamento per la risoluzione e lo studio generale delle equazioni algebriche, si presenta questo problema:

Data un'equazione algebrica, priva di radici multiple:

$$f(x) = (x - \alpha_1)\,.\,(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_m) = 0\,, \tag{1}$$

con coefficienti appartenenti a un dato campo di razionalità, vedere se e come si abbassi il suo gruppo di Galois, per l'aggiunta di una data grandezza β_1, radice di un'altra data equazione $f_1(x) = 0$.

Considerata l'equazione $f_2(x) = 0$ risolvente di Galois della proposta (1), è noto che il problema equivale a quest'altro: vedere come si scomponga $f_2(x)$ in fattori irriducibili, dopo l'aggiunta di β_1 al campo di razionalità primitivo.