ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

Geometria. — *Sulle superficie di Peterson* [1]. Nota della Sig.na dott. ISABELLA PARIS, presentata dal Socio L. BIANCHI.

Le equazioni parametriche di una superficie S di Peterson riferita ad un sistema di assi coordinati cartesiani ortogonali e in cui per l'asse delle z è assunto l'asse della superficie, si scrivono:

$$(\mathrm{I}) \qquad x = \mathrm{U}v \quad ; \quad y = \mathrm{U}.\mathrm{V} \quad ; \quad z = u$$

dove U e V sono funzioni arbitrarie, rispettivamente della sola u e della sola v [2].

Se si esprime che la superficie S ammette un altro asse di Peterson, incidente al primo ed ortogonale ad esso (per es. l'asse delle x), e cioè che i profili meridiani $\frac{y}{z} = \text{cost}$ sono coniugati alle linee di livello $x = \text{cost}$, scrivendo la corrispondente condizione:

$$\mathrm{D}\, du\, \delta u + \mathrm{D}''\, dv\, \delta v = 0,$$

si trova che le funzioni arbitrarie U e V devono soddisfare l'equazione differenziale seguente:

$$(1) \qquad -\mathrm{U}\mathrm{U}''(v\mathrm{V}' - \mathrm{V})\frac{\mathrm{V}'}{v\mathrm{V}} - \mathrm{U}'\mathrm{V}''\left(\frac{\mathrm{U}}{u} - \mathrm{U}'\right) = 0.$$

Questa ci dà subito:

$$(2) \qquad \frac{\mathrm{U}\mathrm{U}''}{\mathrm{U}'\left(\frac{\mathrm{U}}{u} - \mathrm{U}'\right)} = k \quad ; \qquad (3) \quad \frac{v\mathrm{V}\mathrm{V}''}{\mathrm{V}'(r\mathrm{V}' - \mathrm{V})} = k$$

dove k è una costante arbitraria. Con una prima quadratura la (2) ci dà:

$$\mathrm{U}' = \mathrm{C}_1 \frac{\mathrm{U}^k}{u^k} \qquad (\mathrm{C}_1 \text{ costante arbitraria})$$

e con una seconda (supposto per ora $k \neq 1$):

$$\frac{\mathrm{U}^{1-k}}{1-k} = \frac{\mathrm{C}_1}{1-k} u^{1-k} + \mathrm{C}_1' \quad (\mathrm{C}_1' \text{ costante arbitraria})$$

[1] Diciamo col Bianchi superficie di Peterson quelle in cui alle sezioni piane prodotte nelle superficie dei piani di un fascio sono coniugate le sezioni fatte con piani normali all'asse del fascio (asse della superficie).

[2] Cfr. Bianchi, *Le congruenze rettilinee infinite volte di rotolamento e le superficie di Peterson*, § 7, Memorie della Società dei 40, Serie 3a, tomo XIX (1916).

La funzione U viene quindi determinata dall'espressione:

$$U = \sqrt[1-k]{C_1 u^{1-k} + C_2}\,.$$

Dalla (3), con due quadrature, determiniamo la funzione V:

$$V = \sqrt[1-k]{C' v^{1-k} + C}$$

dove C e C′ sono costanti arbitrarie. Le equazioni parametriche (1) si scrivono quindi:

$$x = \sqrt[1-k]{C_1 u^{1-k} + C_2}\,.\,v$$
$$y = \sqrt[1-k]{C_1 u^{1-k} + C_2}\,.\,\sqrt[1-k]{C' v^{1-k} + C}$$
$$z = u\,.$$

Ed eliminando i parametri u, v:

$$-C' x^{1-k} + y^{1-k} - CC_1 z^{1-k} = CC_2\,,$$

che scriviamo (supponendo $CC_2 \neq 0$) [1]:

$$Ax^{1-k} + By^{1-k} + Cz^{1-k} = 1\,,$$

equazione che ci definisce le superficie tetraedrali di Lamé.

Il caso ora escluso $k = 1$, si tratta subito. Per esso le equazioni differenziali (2) e (3) integrate ci dànno:

$$U = C_2 u^{c_1} \quad ; \quad V = C' v^{c+1}$$

e quindi le equazioni parametriche della superficie che ne risulta si scrivono:

$$x = C_2 u^{c_1}\,.\,v$$
$$y = C_2 C' u^{c_1}\,.\,v^{c+1}$$
$$z = u\,.$$

Ed eliminando i parametri u, v:

$$Ayz^{cc_1} = Bx^{c+1}\,,$$

che scriviamo:

$$x^\alpha y^\beta z^\gamma = \text{cost.}$$

Notiamo ora che, esprimendo per la superficie S l'esistenza di un terzo asse di Peterson incidente ai due considerati nel loro punto comune ed ortogonale ad essi (l'asse delle y), si trova la *stessa* equazione differenziale (1).

[1] Per $CC_2 = 0$ la superficie si risolve in $1 - k$ piani per l'asse z, o in un cono col vertice nell'origine degli assi e questo a seconda che è zero C (ovvero C e C_2), oppure è zero C_2 soltanto.

Possiamo quindi concludere che:

Una superficie di Peterson che ammetta due assi diversi incidenti ed ortogonali, ne ammette anche un terzo, incidente ed ortogonale ai due. Tali superficie sono tutte e sole le superficie tetraedrali di Lamé [1]:

$$\text{(II)} \qquad Ax^\alpha + By^\alpha + Cz^\alpha = 1$$

e le superficie:

$$\text{(II*)} \qquad x^\alpha y^\beta z^\gamma = \text{cost.}$$

Osservazione. — Nelle notazioni di Monge le superficie di Peterson *rispetto all'asse z* sono caratterizzate dalla equazione a derivate parziali del secondo ordine

$$\text{(A)} \qquad q(rx + sy) = p(sx + ty)$$

e quelle di Peterson *rispetto all'asse x* dall'altra

$$\text{(B)} \qquad s(z - qy) + typ = 0.$$

Similmente le superficie di Peterson *rispetto all'asse y* sono caratterizzate dalla terza [ottenuta dalla (B) collo scambio di x, y]

$$\text{(B*)} \qquad s(z - pz) + rxq = 0;$$

e poichè la (A) si ottiene dalle (B), (B*) per sottrazione, ne risulta nuovamente dimostrata la prima parte del teorema superiore. I risultati ottenuti provano poi che le due equazioni simultanee (A), (B) (non in involuzione) posseggono soluzioni comuni dipendenti dal massimo numero possibile di costanti arbitrarie, cioè da quattro; e tali soluzioni sono calcolate così in termini finiti dalle formole (II) e (II*).

[1] Fra queste figurano le quadriche a centro che sono appunto, come è evidente, superficie di Peterson rispetto a ciascuno dei loro tre assi.