ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 febbraio 1919.

F. D'Ovidio, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Geometria assoluta degli spazi curvi.* Nota II di Tommaso Boggio, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo.

7. Dimostriamo ora il teorema di Schur. Posto:

$$(a)\qquad \begin{cases} f_1(d\,,\delta\,,Q)=\delta Q\times(\delta d^2Q-d^2\delta Q)\,,\\ f_2(d\,,\delta\,,Q)=dQ^2\,.\,\delta Q^2-(dQ\times\delta Q)^2\,,\end{cases}$$

per la curvatura $\mathcal{K}_{d,\delta}$ secondo la giacitura determinata da $dQ\,,\delta Q$ abbiamo trovato (form. 15 del § 6):

$$(b)\qquad \mathcal{K}_{d,\delta}=f_1(d\,.\,\delta\,,Q)/f_2(d\,.\,\delta\,,Q)\,.$$

Supponiamo che in ogni punto Q di C_n la $\mathcal{K}$ sia indipendente da d e δ, cioè *non vari* (*per uno stesso* Q) *con la giacitura considerata.* In tale ipotesi, per la curvatura $\mathcal{K}$ in Q si ha:

$$\mathcal{K}=f(Q)\,,$$

cioè $\mathcal{K}$ è funzione *soltanto* di Q. La curvatura nel punto $Q+d'Q$ sarà data da:

$$\mathcal{K}+d'\mathcal{K}=f(Q+d'Q)=\frac{f_1(d\,.\,\delta\,,Q)+\varepsilon_1}{f_2(d\,,\delta\,,Q)+\varepsilon_2}\,,$$

ove $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ sono infinitesimi di ordine superiore al quarto; perciò, a meno di tali infinitesimi, si ha:

$$\mathcal{K} + d'\mathcal{K} = f(Q) = \mathcal{K},$$

cioè $d'\mathcal{K} = 0$, onde $\mathcal{K} =$ costante, e ciò prova appunto il teorema di Schur.

8. In ciò che precede abbiamo ottenuto, con minimi mezzi e con calcoli semplicissimi, le geodetiche degli spazî curvi, la curvatura riemanniana e il teorema di Schur, che con i metodi algebrici usuali richiedono calcoli complicatissimi. In altri lavori vedremo altre proprietà che otterremo pure in modo elementare. Per ora è intanto utile confrontare e collegare ciò che abbiamo ottenuto, con quanto si fa con i metodi algebrici ordinarî.

L'algebra ordinaria degli spazî curvi è basata sulla forma quadratica differenziale f, che, sotto forma assoluta, è espressa da $f = dP \times \alpha dP$. L'introduzione delle coordinate conduce a invarianti, covarianti, controvarianti, ecc. (che, naturalmente, spariscono con lo sparire delle coordinate), che si ottengono considerando le trasformazioni biunivoche dei punti P in altri punti P', che non alterano la forma f.

Dobbiamo dunque, per l'accennato confronto, considerare, oltre la trasformazione di Q in P, anche un'altra trasformazione di Q in P', vale a dire una trasformazione biunivoca di P in P' in E_n. Porremo:

$$(1) \qquad \beta' = \frac{dQ}{dP'} \quad , \quad \alpha' = \mathrm{K}\beta' . \beta' ,$$

$$(2) \qquad \sigma = \frac{dP}{dP'} , \quad \text{e quindi} \quad \sigma^{-1} = \frac{dP'}{dP} ,$$

Osservando che $dQ/dP' = dQ/dP . dP/dP'$, si ha:

$$(3) \qquad \beta' = \beta\sigma \quad , \quad \beta = \beta'\sigma^{-1} ,$$

e poichè $\alpha' = \mathrm{K}\beta' . \beta' = \mathrm{K}\sigma . \mathrm{K}\beta . \beta\sigma$, si ha pure:

$$(4) \qquad \alpha' = \mathrm{K}\sigma . \alpha . \sigma \quad , \quad \alpha = \mathrm{K}\sigma^{-1} . \alpha' . \sigma^{-1}$$

che stabilisce le relazioni fra le metriche determinate da α e α'.

È ovvio che il $ds^2 = dQ^2$ deve essere indipendente dalla trasformazione di C_n in E_n, cioè deve essere:

$$ds^2 = dQ^2 = dP \times \alpha dP = dP' \times \alpha' dP' ,$$

il che risulta anche osservando che $dP \times \alpha dP = \sigma dP' \times \alpha\sigma dP' = dP' \times \times \mathrm{K}\sigma . \alpha\sigma dP'$. Viceversa, affinchè sia $dP \times \alpha dP = dP' \times \alpha' dP'$, deve valere la prima delle (4). Ma tutto ciò, con le forme assolute, è così ovvio che non ha bisogno di essere enunciato.

9. Ad uno spostamento arbitrario dP' di P' in E_n corrisponde un $d\sigma$ dato da:

(5) $$d\sigma = \sigma \,.\, \Phi_{P'}(\alpha', dP') - \Phi_P(\alpha, dP) \,.\, \sigma ,$$

alla quale, ovviamente, si può dare la forma:

(5') $$\frac{d\sigma}{dP}\,\mathbf{u} = \sigma \,.\, \Phi_{P'}(\alpha', \mathbf{u}) - \Phi_P(\alpha, \sigma\mathbf{u}) \,.\, \sigma ;$$

considerando poi un altro spostamento $\delta P'$ di P' in E_n, si ha:

(6) $$\delta d\sigma - d\delta\sigma = \sigma \,.\, \Theta_{P'}(\alpha', dP', \delta P') - \Theta_P(\alpha, dP, \delta P) \,.\, \sigma ,$$

che giova confrontare con la (5).

Queste formule si dimostrano osservando che da $\beta' = \beta\sigma$ si ricava $d\beta' = d\beta \,.\, \sigma + \beta \,.\, d\sigma$, e quindi per la (5) del § 2:

$$\beta \,.\, d\sigma = \beta' \,.\, \Phi_{P'}(\alpha', dP') - \beta \,.\, \Phi_P(\alpha, dP) \,.\, \sigma ;$$

operando con β^{-1} e osservando che $\beta^{-1} \,.\, \beta' = \sigma$, si ha la (5).

Applicando poi δ al valore precedente di $d\beta'$ risulta:

$$\delta d\beta' = \delta d\beta \,.\, \sigma + d\beta \,.\, \delta\sigma + \delta\beta \,.\, d\sigma + \beta \,.\, \delta d\sigma ;$$

scambiando tra loro d e δ e sottraendo si ha:

$$\delta d\beta' - d\delta\beta' = (\delta d\beta - d\delta\beta)\,\sigma + \beta(\delta d\sigma - d\delta\sigma) ;$$

da questa, per la (11) del § 5 si ricava:

$$\beta(\delta d\sigma - d\delta\sigma) = \beta' \,.\, \Theta_{P'}(\alpha', dP', \delta P') - \beta \,.\, \Theta_P(\alpha, dP, \delta P)\,\sigma ;$$

operando con β^{-1} si ha la (6).

10. Se $\mathbf{u}$ è un vettore funzione di P e quindi anche di P' si ha:

(7) $$d\mathbf{u} + \Phi_P(\alpha, dP)\,\mathbf{u} = \sigma \left\{ d(\sigma^{-1}\mathbf{u}) + \Phi_{P'}(\alpha', dP') \,.\, \sigma^{-1}\mathbf{u} \right\} ,$$

(7') $$\frac{d\mathbf{u}}{dP} + \Phi_P(\alpha, \mathbf{u}) = \sigma \left\{ \frac{d(\sigma^{-1}\mathbf{u})}{dP} + \Phi_{P'}(\alpha', \sigma^{-1}\mathbf{u}) \right\} \sigma^{-1}.$$

Infatti, dalla (5) viene:

(a) $$d\sigma \,.\, \sigma^{-1}\mathbf{u} = \sigma \,.\, \Phi_{P'}(\alpha', dP') \,.\, \sigma^{-1}\mathbf{u} - \Phi_P(\alpha, dP)\,\mathbf{u} ;$$

ma $\mathbf{u} = \sigma\sigma^{-1}\mathbf{u}$, cioè $d\mathbf{u} = d\sigma \,.\, \sigma^{-1}\mathbf{u} + \sigma \,.\, d(\sigma^{-1}\mathbf{u})$, e ricavando di qui $d\sigma \,.\, \sigma^{-1}\mathbf{u}$ e sostituendo nella (a) si ha subito la (7).

In virtù della (8) del § 4, e ricordando che $dP' = \sigma^{-1} dP$, la (7) diventa:

$$\left\{ \frac{d\mathbf{u}}{dP} + \Phi_P(\alpha, \mathbf{u}) \right\} dP = \sigma \left\{ \frac{d(\sigma^{-1}\mathbf{u})}{dP'} + \Phi_{P'}(\alpha', \sigma^{-1}\mathbf{u}) \right\} \sigma^{-1} dP ,$$

che, per l'arbitrarietà di dP dimostra la (7').

Per $\mathbf{u} = \delta P = \sigma \delta P'$, la (7) assume la forma:

$$(8) \qquad d\delta P + \Phi_P(\alpha, dP)\,\delta P = \sigma \{ d\delta P' + \Phi_{P'}(\alpha', dP')\,\delta P' \},$$

e, in particolare, per $\delta = d$:

$$(8') \qquad d^2 P + \Phi_P(\alpha, dP)\,dP = \sigma \{ d^2 P' + \Phi_{P'}(\alpha', dP')\,dP' \}.$$

Secondo il comune linguaggio, il 1° membro della (7') sarebbe la *derivata controvariante di* $\mathbf{u}$ *rispetto a* P.

Come complemento della Nota I, definiremo una nuova omografia $\Gamma^*_P(\alpha, \mathbf{u})$ tale che, per x vettore arbitrario si abbia:

$$(9) \qquad \Gamma^*_P(\alpha, \mathbf{u})\,\mathbf{x} = \mathrm{K}\Phi_P(\alpha, \mathbf{x}) \,.\, \alpha\mathbf{u}.$$

Questa nuova omografia ha per espressione:

$$(10) \qquad \Gamma^*_P(\alpha, \mathbf{u}) = \mathrm{S}_P(\alpha, \mathbf{u}) - \alpha \,.\, \Phi_P(\alpha, \mathbf{u}) =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \mathrm{S}_P(\alpha, \mathbf{u}) + \mathrm{KS}_P(\alpha, \mathbf{u}) - \frac{d\alpha}{dP}\mathbf{u} \right\}.$$

Infatti dalla (4) del § 2 e dalle solite formule del Pieri, risulta:

$$2\mathrm{K}\Phi(\alpha, \mathbf{x}) \,.\, \alpha\mathbf{u} = \left(\frac{d\alpha}{dP}\mathbf{x}\right)\mathbf{u} + \mathrm{KS}(\alpha, \mathbf{x})\,\mathbf{u} - \mathrm{S}(\alpha, \mathbf{x})\,\mathbf{u} =$$

$$= \mathrm{S}(\alpha, \mathbf{u})\,\mathbf{x} + \mathrm{KS}(\alpha, \mathbf{u})\,\mathbf{x} - \left(\frac{d\alpha}{dP}\mathbf{u}\right)\mathbf{x},$$

da cui segue la (10).

11. Avendo $\mathbf{u}$ il precedente significato si ha:

$$(11) \qquad d\mathbf{u} - \Gamma^*_P(\alpha, \alpha^{-1}\mathbf{u})\,dP = \mathrm{K}\sigma^{-1} \{ d(\mathrm{K}\sigma\mathbf{u}) - \Gamma^*_{P'}(\alpha', \alpha'^{-1}\,\mathrm{K}\sigma\mathbf{u})\,dP' \},$$

a cui si può dare la forma:

$$(11') \qquad \frac{d\mathbf{u}}{dP} - \Gamma^*_P(\alpha, \alpha^{-1}\mathbf{u}) = \mathrm{K}\sigma^{-1} \left\{ \frac{d(\mathrm{K}\sigma\mathbf{u})}{dP'} - \Gamma^*_{P'}(\alpha', \alpha'^{-1}\,\mathrm{K}\sigma\mathbf{u}) \right\} \sigma^{-1}.$$

Infatti, operando con K sulla (5), applicando poi al vettore $\mathbf{u}$, si ha, tenendo conto della (9) ed osservando che $\mathrm{K}d\sigma \,.\, \mathbf{u} = d(\mathrm{K}\sigma\mathbf{u}) - \mathrm{K}\sigma \,.\, d\mathbf{u}$:

$$d(\mathrm{K}\sigma\mathbf{u}) - \mathrm{K}\sigma \,.\, d\mathbf{u} = \mathrm{K}\Phi_{P'}(\alpha', dP') \,.\, \mathrm{K}\sigma\mathbf{u} - \mathrm{K}\sigma \,.\, \mathrm{K}\Phi_P(\alpha, dP)\,\mathbf{u} =$$

$$= \Gamma^*_{P'}(\alpha', \alpha'^{-1}\,\mathrm{K}\sigma\mathbf{u})\,dP' - \mathrm{K}\sigma \,.\, \Gamma^*_P(\alpha, \alpha^{-1}\mathbf{u})\,dP,$$

da cui segue la (11), dopo aver operato con $\mathrm{K}\sigma^{-1}$. La (11') si deduce dalla (11) in modo ovvio.

Secondo il solito comune linguaggio, i primi membri delle (11), (11') sono rispettivamente il *differenziale* e la *derivata covariante di* $\mathbf{u}$ *rispetto a* P.

12. Vediamo per ultimo i simboli di Christoffel e di Riemann, il lemma di Ricci e l'identità di Bianchi. Posto

$$P = O + \sum_1^n {}_i\, x_i \mathbf{a}_i\,,$$

ove O è un punto, ed $\mathbf{a}_i$ indicano i vettori unitarî ortogonali di riferimento, si ha per i simboli a 3 indici (di Christoffel) di 2^a e di 1^a specie, rispettivamente:

$$\left\{ \begin{matrix} r\,,s \\ t \end{matrix} \right\} = \mathbf{a}_t \times \Phi_P(\alpha\,, \mathbf{a}_r)\, \mathbf{a}_s \quad , \quad \left[\begin{matrix} r\,,s \\ t \end{matrix} \right] = \mathbf{a}_t \times \alpha\Phi_P(\alpha\,, \mathbf{a}_r)\, \mathbf{a}_s\,;$$

e per i simboli a 4 indici (di Riemann) di 2^a e di 1^a specie, rispettivamente:

$$\{hr\,, st\} = \mathbf{a}_r \times \Theta_P(\alpha\,, \mathbf{a}_s\,, \mathbf{a}_t)\, \mathbf{a}_h \quad , \quad (hr\,, st) = \mathbf{a}_r \times \alpha\Theta_P(\alpha\,, \mathbf{a}_s\,, \mathbf{a}_t)\, \mathbf{a}_h\,.$$

Nell'ordinaria algebra, i primi membri valgono soltanto per $\mathbf{a}_i$ vettori ortogonali di riferimento; nel campo assoluto i secondi membri valgono per $\mathbf{a}_i$ vettori arbitrarî.

Il noto lemma di Ricci è espresso da:

(12) $$d\alpha = \alpha\Phi_P(\alpha\,, dP) + K\Phi_P(\alpha\,, dP)\,\alpha\,,$$

ovvero, sotto forma equivalente:

(12') $$\frac{d\alpha}{dP}\,\mathbf{u} = \alpha\Phi_P(\alpha\,, \mathbf{u}) + K\Phi_P(\alpha\,, \mathbf{u})\,\alpha\,.$$

Infatti, dalla (4) del § 2 si ha:

$$2\alpha\Phi_P(\alpha\,, \mathbf{u}) = \frac{d\alpha}{dP}\,\mathbf{u} + S_P(\alpha\,, \mathbf{u}) - KS_P(\alpha\,, \mathbf{u})\,;$$

operando su questa con K e poi sommando membro a membro si ha la (12'), e quindi la (12).

Se corrispondentemente agli spostamenti d_rP, $(r = 1\,, 2\,, 3)$ poniamo, per abbreviare,

$$\Phi_r = \Phi_P(\alpha\,, d_rP) \quad , \quad \Theta_{r,s} = \Theta_P(\alpha\,, d_rP\,, d_sP)\,,$$

si ha l'identità:

(13) $$\Sigma d_1\Theta_{2,3} = \Sigma(\Theta_{2,3}\Phi_1 - \Phi_1\Theta_{2,3})\,.$$

ove la Σ è estesa alle permutazioni circolari 123 , 231 , 312.

Infatti, la (10) del § 5 può scriversi:

(14) $$\Theta_{2,3} = d_3\Phi_2 - d_2\Phi_3 + \Phi_3\Phi_2 - \Phi_2\Phi_3\,,$$

da cui,

$$d_1\Theta_{2,3} = d_1 d_3 \Phi_2 - d_1 d_2 \Phi_3 + d_1\Phi_3 \,.\, \Phi_2 + \\ + \Phi_3 \,.\, d_1\Phi_2 - d_1\Phi_2 \,.\, \Phi_3 - \Phi_2 \,.\, d_1\Phi_3 \,;$$

scrivendo le due formule che si ottengono da questa permutando circolarmente due volte gli indici, e poi sommando le tre formule, si eliminano evidentemente i differenziali secondi misti delle Φ, e ricordando la (14) si ha senz'altro la (13).

Dalla (13) si deduce poi subito

$$\Sigma d_1(\alpha\Theta_{2,3}) = \Sigma(\alpha\Theta_{2,3}\,\Phi_1 + K\Phi_1 \,.\, \alpha\Theta_{2,3}),$$

la quale riassume le note identità di Bianchi (cfr. Bianchi, *Geometria differenziale*, 2ª ediz., vol. I, pag. 351).

Biologia generale. — *Variabilità del rapporto dei sessi alla nascita nelle covate di alcuni mammiferi pluripari.* Nota II del dott. Marcello Boldrini, presentata dal Corrisp. D. Lo Monaco.

Procediamo a un breve esame dei risultati ottenuti nella Nota precedente. Essi, beninteso, debbono ritenersi veri nei limiti dei dati che si posseggono; i quali, per la loro scarsità, non sembra consentano deduzioni di carattere generale e quindi non è da escludere possano venir contraddetti da rilevazioni più numerose relative a un maggior numero di specie animali.

Chiameremo indice di variabilità normale o variabilità normale senz'altro l'indice che risulta da un numero esteso di osservazioni: intenderemo invece per indice teorico l'unità che, appunto, rappresenta l'indice che si otterrebbe se tutte le variazioni nel rapporto dei sessi nelle singole covate fossero soggette solamente al puro caso.

Gli indici della tabella non presentano mai scostamenti molto forti dall'unità; si va da un minimo di 0,7 a un massimo di 1,3, ove non si consideri l'indice maggiore ottenuto per i dati di Basile sui conigli normali che non si riferisce a covate singole ma a gruppi di covate di varie femmine. Ciò posto, riassumiamo sistematicamente i varî fatti che risultano dall'esame della tabella.

a) Nelle covate di coniglie lecitinate o iniettate con bioplastina si ha una frequenza di combinazioni medie superiore a quella che dovrebbe riscontrarsi per puro effetto del caso. Tale tendenza è maggiore nelle prime — composte in media di 5,3 nati — che nelle seconde — composte in media di 6,8 nati — e contrasta con la tendenza opposta delle covate normali, composte in media di 7,3 nati. Ciò concorda col reperto di Basile di una