ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 marzo 1919.

A. Ròiti, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Astronomia. — *Una pseudo-determinazione della costante d'aberrazione.* Nota II del Corrispondente V. Cerulli.

Nella nostra precedente Nota di egual titolo, dimostrammo la formula:

$$C\varDelta f + \varDelta\varphi = \varphi - \varphi_0\,, \tag{1}$$

posta dal sig. G. Boccardi a base della sua ricerca sulla costante d'aberrazione, esser falsa sì per la omissione [1] dei termini di parallasse e di moto proprio, e sì per il segno del coefficiente dell'incognita $\varDelta f$. Dimostrammo anche che attesa la eliminazione sostanzialmente operata dall'A., della incognita φ_0, la (1) dovesse, a prescindere dagli errori or detti, più correttamente scriversi:

$$\left\{C - \frac{\Sigma C}{N}\right\}\varDelta f + \left\{\varDelta\varphi - \frac{\Sigma\varDelta\varphi}{N}\right\} = \varphi - \frac{\Sigma\varphi}{N}\,, \tag{2}$$

e derivarsi da questa l'equazione mensile:

$$n\left\{C_m - \frac{\Sigma C}{N}\right\}\varDelta f + n\left\{\varDelta\varphi_m - \frac{\Sigma\varDelta\varphi}{N}\right\} = n\left\{\varphi_m - \frac{\Sigma\varphi}{N}\right\}. \tag{3}$$

[1] La omissione di detti termini può essere una necessità quando il $\varDelta f$ ci è dato, non da una sola stella, osservata per tutto l'anno, ma da interi gruppi di stelle, che si sostituiscono con nuovi gruppi man mano che i loro passaggi vengono a cader in ore diurne. In tal caso i $\varDelta f$ (se si calcolassero di stella in stella) risulterebbero falsati, oltre che dalla perturbazione zenitale, anche dalla parallasse e dai moti proprî, ma più son le stelle impiegate, e più c'è naturalmente da aspettarsi che nel $\varDelta f$ complessivo tali cause d'errore si compensino.

In terzo luogo notammo che la equazione-somma di tutte queste equazioni mensili debba necessariamente risultar della forma $0 = 0$, e che quindi il metodo ideato dal Boccardi per determinare Δf sia affatto illusorio. Ma oltre questo modo di sommazione delle equazioni mensili, il Boccardi ne ha escogitato anche un secondo del quale è tempo di occuparci.

L'A. del *Saggio* pensa che i $\Delta\varphi$ debbano autoeliminarsi non soltanto nella somma generale delle equazioni mensili, ma eziandio in ciascuna delle due somme parziali che risultano addizionando da una parte tutte le equazioni con coefficiente C positivo, e dall'altra tutte quelle con C negativo. Sfuggendogli che queste due somme parziali, quando siano correttamente dedotte, devono, aggiunte fra loro, dar $0 = 0$, egli se le immagina come due equazioni diverse ed indipendenti; e crede che se risolvendole, otterrà da entrambe lo stesso Δf, o due Δf poco diversi, ciò vorrà dire che effettivamente in ciascuna i $\Delta\varphi$ erano scomparsi!

Tali equazioni, in base a tutti e tre i cicli chandleriani considerati (1812-1916), sono [1]:

$$(4)\quad \begin{cases} \text{C positivi} \quad +15{,}82\,\Delta f = +0'',716 \quad \text{da cui} \quad \Delta f = +0'',045 \\ \text{C negativi} \quad -10{,}98\,\Delta f = -0\,,627 \quad \text{da cui} \quad \Delta f = +0\,,057\,, \end{cases}$$

e Boccardi non esita a scrivere: « l'accordo dei due Δf è molto soddisfacente, ... e depone in favore dell'ipotesi del compenso nelle variazioni di φ negli n (*termini noti*) corrispondenti ai C positivi e negativi, separatamente ».

La fallacie di questa illazione è senz'altro manifesta, ma vogliamo esaminarne i termini un po' più a fondo.

Per dedurre dalle equaz. mensili (3) le somme parziali intese dall'A., indichiamo con $\sum\limits_{+}$ e $\sum\limits_{-}$ i sommatorî delle quantità $C, \varphi, \Delta\varphi, n$, in rispondenza rispettivamente delle equazioni a C positivo e negativo, e con Σ i sommatorî totali. La somma delle equazioni positive dà:

$$\left\{\sum_{+} nC - \frac{\Sigma C}{N}\sum_{+} n\right\}\Delta f + \left\{\sum_{+} n\Delta\varphi - \frac{\Sigma\Delta\varphi}{N}\sum_{+} n\right\} = \left\{\sum_{+} n\varphi - \frac{\Sigma\varphi}{N}\sum_{+} n\right\},$$

dove abbiamo soppressi gli apici m, ed intendiamo che sotto i segni $\sum\limits_{+}$ e $\sum\limits_{-}$ si aggruppino medie mensili. Similmente la somma delle equazioni con C negativo sarà

$$\left\{\sum_{-} nC - \frac{\Sigma C}{N}\sum_{-} n\right\}\Delta f + \left\{\sum_{-} n\Delta\varphi - \frac{\Sigma\Delta\varphi}{N}\sum_{-} n\right\} = \left\{\sum_{-} n\varphi - \frac{\Sigma\varphi}{N}\sum_{-} n\right\}.$$

[1] Queste equazioni così scritte possono effettivamente (senza che l'A. ne abbia avuta l'intenzione) illudere chi legge, e fargli credere che per due vie diverse e indipendenti si sia giunti a due risultati pressochè identici: ciò che conferirebbe ai risultati stessi un *imponente* grado di attendibilità.

Ma attese le relazioni:

$$\mathrm{N} = \sum_{+} n + \sum_{-} n \qquad \sum \Delta\varphi = \sum_{+} n\Delta\varphi + \sum_{-} n\Delta\varphi \qquad \sum \mathrm{C} = \sum_{+} n\mathrm{C} + \sum_{-} n\mathrm{C}$$

$$\sum \varphi = \sum_{+} n\varphi + \sum_{-} n\varphi ,$$

le due equazioni si potranno anche scrivere:

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\mathrm{N}} \left\{ \sum_{-} n \sum_{+} n\mathrm{C} - \sum_{+} n \sum_{-} n\mathrm{C} \right\} \Delta f + \frac{1}{\mathrm{N}} \left\{ \sum_{-} n \sum_{+} n\Delta\varphi - \sum_{+} n \sum_{-} n\Delta\varphi \right\} = \\ & \qquad = \frac{1}{\mathrm{N}} \left\{ \sum_{-} n \sum_{+} n\varphi - \sum_{+} n \sum_{-} n\varphi \right\} \\ & \frac{1}{\mathrm{N}} \left\{ \sum_{+} n \sum_{-} n\mathrm{C} - \sum_{-} n \sum_{+} n\mathrm{C} \right\} \Delta f + \frac{1}{\mathrm{N}} \left\{ \sum_{+} n \sum_{-} n\Delta\varphi - \sum_{-} n \sum_{+} n\Delta\varphi \right\} = \\ & \qquad = \frac{1}{\mathrm{N}} \left\{ \sum_{+} n \sum_{-} n\varphi - \sum_{-} n \sum_{+} n\varphi \right\} . \end{aligned} \right.$$

Sono dunque un'unica equazione, scritta ora con uno, ora con l'altro segno, come era naturale di attendersi, sapendo che la loro somma deve dar zero in entrambi i membri. Le equazioni con C positivo sono 26, ed in tutte è assunto $n = 1$: quindi $\sum_{+} n = 26$. Le equazioni con C negativo sono 22, in 17 delle quali è $n = 1$, ed in 5 è $n = 1/2$. Dunque $\sum_{-} n = 17 + {}^5/_2 = 19{,}5$, e la (5) diventa:

$$\frac{1}{45{,}5} \left\{ 19{,}5 \sum_{+} \mathrm{C} - 26 \sum_{-} n\mathrm{C} \right\} \Delta f + \frac{1}{45{,}5} \left\{ 19{,}5 \sum_{+} \Delta\varphi - 26 \sum_{-} n\Delta\varphi \right\} =$$

$$= \frac{1}{45{,}5} \left\{ 19{,}5 \sum_{+} \varphi - 26 \sum_{-} n\varphi \right\} ,$$

dove abbiamo conservato il fattore n in $\sum_{-}$, ma lo abbiamo soppresso in $\sum_{+}$ per ivi essere dappertutto $= 1$. Il secondo membro può esprimersi mediante i termini [1] noti ν delle equazioni dell'A., osservando che:

$$\sum_{+} \varphi = \sum_{+} \nu + 26\,\varphi_0 \quad , \quad \sum_{-} n\varphi = \sum_{-} n\nu + 19{,}5\,\varphi_0 ,$$

da cui:

$$19{,}5 \sum_{+} \varphi - 26 \sum_{-} n\varphi = 19{,}5 \sum_{+} \nu - 26 \sum_{-} n\nu ,$$

[1] L'A. indica i termini noti con n, che noi abbiamo adoperato qui sopra in altro senso.

e l'equazione precedente prende la forma:

$$\left\{0{,}43\underset{+}{\Sigma}C - 0{,}57\underset{-}{\Sigma}nC\right\}\Delta f + \left\{0{,}43\underset{+}{\Sigma}\Delta\varphi - 0{,}57\underset{-}{\Sigma}n\Delta\varphi\right\} =$$

$$= \left\{0{,}43\underset{+}{\Sigma}\nu - 0{,}57\underset{-}{\Sigma}n\nu\right\}.$$

Per completare la messa in numeri, attingiamo alla Nota II di Boccardi, correggendone un errore nel C del 21 luglio 1915:

$$\underset{+}{\Sigma}C = +15{,}29 \quad \underset{-}{\Sigma}nC = -10{,}98 \quad \underset{+}{\Sigma}\nu = +0'',716, \quad \underset{-}{\Sigma}n\nu = -0'',627$$

e l'equazione sarà:

$$+12{,}83\,\Delta f + X = +0'',665 \tag{6}$$

dov'è posto:

$$X = 0{,}43\underset{+}{\Sigma}\Delta\varphi - 0{,}57\underset{-}{\Sigma}n\Delta\varphi\,.$$

Questa (6) è l'equazione *unica* alla quale l'A. sarebbe pervenuto calcolando correttamente. Le sue equazioni (4) che egli crede indipendenti, così da poter dal confronto dei risultati della loro risoluzione rispetto a Δf, trarre *a posteriori* il criterio circa l'esattezza della ipotesi $X = 0$, non sono che due edizioni diversamente errate della (6), nella quale si sia *arbitrariamente* posto $X = 0$. Ed è ovvio quindi che se le (4) conducono allo stesso Δf, ciò non significa punto che i termini in $\Delta\varphi$, che l'A. non ha scritti, effettivamente si annullassero. L'accordo nasce semplicemente dal dover i due Δf essere per necessità prossimi al Δf che si trae dalla (6) nell'ipotesi $X = 0$.

Ora, che questa ipotesi sia affatto erronea, deriva in primo luogo dalle stesse premesse del Boccardi. Egli ha supposto che siano nulli separatamente $\underset{+}{\Sigma}\Delta\varphi$ e $\underset{-}{\Sigma}\Delta\varphi$; non può più quindi pretendere, logicamente discorrendo, anche nullo $\underset{-}{\Sigma}n\Delta\varphi$. Lo stesso errore ha egli commesso nella somma generale, come vedemmo nella nostra Nota I, e l'abbaglio è nato dal vezzo tutto nuovo di operar con equazioni *a termini sottintesi*.

Ma in secondo luogo, la premessa ipotetica, racchiusa nella formula $\underset{+}{\Sigma}\Delta\varphi = \underset{-}{\Sigma}\Delta\varphi = 0$, è essa stessa così giustificabile da potersi dire che, dando a tutte le equazioni mensili lo stesso peso, il procedimento sarebbe stato da ritener corretto?

Certamente quelle due somme devono essere assai piccole, ma anche tutte le altre quantità che il nostro calcolo contempla, sono microscopiche (ci muoviamo fra i centesimi ed i millesimi di secondo), e nessun, benchè menomo, termine può essere omesso, senza che ci sia pericolo di compromettere la veridicità del risultato. La serietà della ricerca imponeva al Boccardi l'obbligo di rendersi conto del *maximum* dell'errore che poteva commettersi, trascurando l'incognita X, ossia le due somme parziali $\underset{+}{\Sigma}\Delta\varphi$ e $\underset{-}{\Sigma}\Delta\varphi$. Nè per far tanto gli occorreva di attendere la pubblicazione dei risultati dell'opera internazionale delle latitudini, dal momento che la polodia non era per lui altro che il ciclo di Chandler.

Assumiamo infatti i $\Delta\varphi$ espressi sufficientemente bene dalla formula [1]: $\Delta\varphi = 0'',17 \sin\left(\frac{\odot}{1,185} + A\right)$ dove la longitudine $\odot$ del Sole si prende a misura del tempo e s'intende contata indefinitamente, a partire dall'equinozio di primavera del 1912.

Le osservazioni di Boccardi si fecero, come nella Nota I abbiam detto, su $^1/_2(\alpha + \delta)$ Cygni, il cui coefficiente d'aberrazione è $C = 0,91 \sin(\odot + 16)^h$ e durarono da $\odot = 6^h$ a $\odot = 91^h$. Fra questi limiti il coefficiente C fu:

positivo negli intervalli	$\odot = 8^h$–20	32–44	56–68	80–91^h
e negativo » »	$\odot = 6$ –8	20–32	44–56	68–80

In rispondenza dell'insieme di tutti i primi e di tutti i secondi, rispettivamente, di codesti intervalli, la somma dei $\Delta\varphi$, uniformemente distribuiti, è proporzionale all'area $0'',17 \int \sin\left(\frac{\odot}{1,185} + A\right) d\odot$ la quale facilmente si calcola essere $= + 0'',725 \cos A$ per i C positivi, e $- 0'',741 \cos A$ per i negativi. E siccome la prima area si estende sopra un'ascissa $= 47/12 . 3,14...$ e la seconda sopra un'ascissa $= 19/6 . 3,14...$, così l'*ordinata media* sarà nel primo caso $+ 0'',059 \cos A$, e nel secondo $- 0'',074 \cos A$. Potremo dunque *stimare*:

$$\underset{+}{\Sigma}\Delta\varphi = + 26 \times 0'',059 \cos A = + 1'',53 \cos A \quad \text{per essere } 26 \text{ i C positivi}$$

$$\underset{-}{\Sigma}\Delta\varphi = - 22 \times 0'',074 \cos A = - 1'',63 \cos A \quad \text{» } 22 \text{ » » negativi,}$$

le quali quantità sono bensì piccole, ma tutt'altro che nulle, rispetto al problema che l'A. ha per le mani, ed il porle *a priori* fra le trascurabili

[1] La semiamplitudine $0'',174$ e la durata 1, 185 anni giuliani (pari a 433 giorni medî) del periodo di Chandler, sono il risultato complessivo, a tutt'oggi, delle ricerche sul periodo stesso (v. *Resultate des intern. Breitendienstes.* Bd. V, Berlin, 1916). Ma valori poco diversi erano ben cogniti anche al tempo della ricerca che esaminiamo.

equivale ad aspettarsi che per fortunato accidente si trovi di essere $A = 6^h$ oppure 18^h. Per pochissimo infatti che la fase iniziale del periodo di Chandler sia diversa dall'uno o dall'altro di questi due tipi, le somme or ora scritte producono subito un radicale mutamento nel valore calcolato per Δf.

L'ipotesi $\sum_{+} \Delta\varphi = \sum_{-} \Delta\varphi = 0$ rappresentava dunque un *pressappoco* del quale non era lecito al nostro autore di contentarsi, dal momento che aveva a che fare con i centesimi di secondo. L'errore a cui egli si è così esposto per Δf è, in base alla (6), all'incirca:

$$\frac{1}{12,83} \{0,43 \times 1'',53 + 0,57 \times 1''63\} \cos A\,,$$

ossia $0'',124 \cos A$, cosicchè può dirsi che la sua ricerca, astraendo da altri errori, abbia lasciato Δf nella forma $\Delta f = +0'',052 - 0'',124 \cos A$, cioè indeciso fra $-0'',072$ e $+0'',176$, tuttochè al Boccardi sembri modesto il fissarne a $\pm 0'',01$ l'error medio!

È quindi messa in piena luce la verità di quanto asserimmo nella Nota I, la ricerca del Boccardi sulla costante d'aberrazione non aver dato risultato alcuno, altro che apparente. Tutt'al più, se, correggendo l'errore di segno dei C, segnalato nella detta Nota, consideriamo che l'ora dedotta escursione dei *possibili* Δf è da $+0'',072$ a $-0'',176$, potremo dai numeri del Boccardi arguire che una diminuzione della costante $20'',47$ sia *più probabile* che un aumento, essendo il termine negativo dell'escursione maggiore, in valore assoluto, del termine positivo. Ma di quanto importi la detta diminuzione, l'A. non è riuscito a darci veruna idea.

Si vede che perchè il secondo modo tenuto dall'A. nel sommar le sue equazioni mensili potesse condurre ad un risultato, era necessario conoscere l'amplitudine $2a$ e la fase iniziale A del ciclo chandleriano. Per procurarsi i quali dati, Boccardi avrebbe dovuto risolvere un sistema di equazioni come il (3) della nostra Nota I [1].

$$\Delta\varphi_0 - t\mu - D\pi - C\Delta f + \sin\frac{360^\circ t}{1.185}\, a\cos A + \cos\frac{360^\circ t}{1.185}\, a \sin A = \varphi - \varphi_0\,.$$

Ma con ciò egli avrebbe già ottenuto il valore della sua incognita Δf, onde in definitiva, il suo secondo metodo, *se rettificato, diventava superfluo.*

[1] Sarebbe stato utile all'A. risolvere queste equazioni, anche per veder *come*, cioè con quali resti, il ciclo puro di Chandler avrebbe rappresentato le sue osservazioni. In questo calcolo potevano omettersi i termini in μ π Δf (microvariazioni), e conservarsi solo quelli in $\Delta\varphi_0$, $a \sin A$, $a \cos A$ (macrovariazioni).

È curioso come al nostro A. siano sfuggiti dei metodi semplicissimi di vera eliminazione dei $\Delta\varphi$, che pur si presentano naturali e spontanei a chiunque anche per poco rifletta al problema, non conoscendo della polodia altro che la durata del periodo chandleriano. Ci basta citarne qui brevemente due soli (1).

1° METODO. — 6 periodi di Chandler equivalendo prossimamente a 7 anni, se facciamo la media delle latitudini misurate giorno per giorno in 7 anni, avremo φ_0 libera da ogni residuo di polodia, di parallasse e di aberrazione. Scriviamo ora per ogni misura di latitudine l'equazione:

$$t\mu + D\pi + C\Delta f = (\varphi_0 - \varphi) + \Delta\varphi\,,$$

un'efemeride dandoci D e C giorno per giorno, e sommiamo tali equazioni per ciascuno dei 6 cicli, cioè di 14 in 14 mesi. Riusciremo così a 6 equazioni–somma nelle 3 sole incognite μ π Δf, e libere dai $\Delta\varphi$. Per dar maggiori coefficienti alle incognite principali π e Δf, si faccia la somma di 2 in 2 cicli, anzichè di 1 in 1. Risulteranno 3 equazioni a 3 incognite, e non ci sarà più nemmeno bisogno di minimi quadrati. Invece di sommare le equazioni diurne, si può scrivere l'equazione *media* per ciascun ciclo o gruppo di cicli, calcolando i D e C *medii* per i rispettivi intervalli.

Questa è, come si vede, la rettifica del primo metodo di sommazione impiegato dall'A. Ma avrebbe richiesto che le misure cominciate in giugno 1912, si protraessero fino al giugno 1919. Per far più presto a trovare un Δf purchessia, ma almeno logicamente corretto, potevano bastare i 4 cicli dal 1912 al 1917, sommando ciclo per ciclo, ed introducendo l'incognita $\Delta\varphi_0$. Quattro equazioni tra quattro incognite.

2° METODO. — Un metodo di sommazione che poteva dar risultati anche solo con 3 cicli era il seguente. Si aggiunga ad ogni equazione diurna quella che vale per 7 mesi dopo, o se ne sottragga quella che vale per 14 mesi dopo. Nelle equazioni sottrattive non figura φ_0, nelle additive figura $2\varphi_0$, che si prende a quarta incognita a fianco di μ π Δf. Equazioni additive e sottrattive si trattano con i minimi quadrati.

Ma tralasciando ogni altro discorso circa la eliminazione dei $\Delta\varphi$ nella polodia chandleriana, vogliamo appurare il vero Δf dato dalle medie mensili del nostro A., in base, cioè, alla polodia vera, ed indagare quanta probabilità ci sia che esso effettivamente rappresenti una correzione di cui la costante d'aberrazione 20″,47 abbia bisogno.

(1) Questi ed altri metodi di eliminazione dei $\Delta\varphi$ sarebbero corretti solo *formalmente*, cioè in logica connessione con la ipotesi dell'A. Ma *sostanzialmente* sono tutti falsi, non potendosi nella polodia vera, che è frutto di osservazione, statuir nulla *a priori* circa i limiti, stretti o larghi, entro cui $\Sigma\Delta\varphi$ sia sicuramente nulla o trascurabile, per il calcolo di Δf.

Dobbiamo a tal fine applicare alle 48 medie mensili l'equazione già vista nella Nota I:

$$(7) \qquad \Delta\varphi_0 - t\mu - D\pi - C\Delta f = \varphi - (\varphi_0 + \Delta\varphi) \text{ (}^1\text{)}$$

dove il $\Delta\varphi$ si attinge ai risultati del servizio internazionale. Siccome si omette il termine z, il $\Delta\varphi$ per meridiani poco discosti da quello di Greenwich s'identifica senz'altro con la x internazionale. Il calcolo è abbastanza breve, potendosi limitar i coefficienti a 2 decimali ([2]), e servirsi di piccole tavole di moltiplicazione anzichè di logaritmi. Il metodo dei min. quad. conduce dunque prontamente al risultato qui appresso:

Error medio di una media mensile di peso $1 = \pm 0{,}103$

([3]) $\varphi_0 = 16'',245$	$\Delta\varphi_0 = -0'',029$	e. m.	$\pm 0'',016$
	$\mu = +0'',001$		$\pm 0'',020$
	$\pi = -0'',089$		$\pm 0'',025$
	$\Delta f = -0'',106$		$\pm 0'',025$

Qui si vede che il Δf effettivamente risultante dalle medie mensili, a parte la correzione del segno, è più che doppio di quello che il Boccardi traeva dalle sue equazioni (4) o che si sarebbe avuto dalla nostra (6) facendovi $X = 0$. Appare così anche *a posteriori* quanto erronea fosse quest'ul-

([1]) Formate queste equazioni, se ne facciamo la somma, troviamo:

$$+45{,}5\,\Delta\varphi_0 - 0{,}35\,\mu - 3{,}92\,\pi - 4{,}29\,\Delta f = +0'',089 - 0'',769$$

mentre Boccardi aveva: $\qquad + 4{,}84\,\Delta f = +0'',089$

Se poi sommiamo separatamente le equazioni positive e le negative, le due risultanti che per la presenza della $\Delta\varphi_0$ non si riducono più ad una sola, sono:

$$+26{,}0\,\Delta\varphi_0 - 3{,}52\,\mu - 0{,}55\,\pi - 15{,}26\,\Delta f = +0'',716 + 0'',184$$
$$+19{,}5\,\Delta\varphi_0 + 3{,}17\,\mu - 3{,}37\,\pi + 10{,}97\,\Delta f = -0'',627 - 0'',953$$

L'A. scriveva in loro vece: $\qquad +15{,}82\,\Delta f = +0'',716$

$\qquad -10{,}97\,\Delta f = -0'',627.$

Sono così messi in altro modo in evidenza gli errori dell'esaminato procedimento, i *risultati* del quale l'A. non si perita di paragonare a quelli di uno Struve!

([2]) Scriviamo i coefficienti delle incognite con due soli decimali, e contiamo le longitudini solari in ore intere, ciò essendo pienamente sufficiente nel calcolo che abbiam per mano. Il nostro A. prende le longitudini in gradi e minuti, tenendo fin d'occhio quella piccola frazion di primo che è la *pars constans* dell'aberrazione solare!, e carica di 4 decimali i coefficienti, e di 5 i loro logaritmi (che non si sa perchè siano pubblicati). Però gli accade che curando la quinta cifra, gli riesca falsa la prima, in conseguenza dell'errore nel C del 21 luglio 1915, notato nel testo, errore che s'è naturalmente riversato per intero sull'equazione somma.

([3]) Questa φ_0 di partenza è la media aritmetica delle φ_0 assunte dall'A. per le due stelle del Cigno, nella sua Nota II.

tima ipotesi, unita all'omissione del termine di parallasse. Ma più importanti ad osservare sono i tre fenomeni seguenti:

a) Il forte error medio della media mensile. Essendovi state di regola due osservazioni al giorno, ogni media mensile possiam sicuramente assumere che riposi, fatta larga parte alle lacune per cattivo tempo, sopra un *minimum* di 36 misure. Da altra parte rammentiamo dalla nostra Nota sull'onda lunare (¹), che l'e. m. di *una* di queste misure è 0″,2. L'error medio di una media di almanco 36 misure, dovrebbe risultar dunque $= \frac{0'',2}{\sqrt{36}} = 0'',033$, mentre qui troviamo 0″,103, vale a dire più di 3 volte tanto. Ciò vuol semplicemente dire che la (7) è *insufficiente* a rappresentare le osservazioni, ossia manca di termini non trascurabili.

b) La parallasse negativa, che *come parallasse assoluta* è naturalmente un assurdo.

c) I piccoli errori medî della parallasse e dell'aberrazione, dai quali sembrerebbe derivare qualche attendibilità ai valori trovati per tali incognite, abbenchè uno assurdo, e l'altro certamente troppo forte.

In questi tre fenomeni si rivela l'opera della perturbazione zenitale (²). Dobbiamo infatti immaginarci che questa si componga di parecchie onde elementari, le più delle quali affatto diverse per fase dalle onde di aberrazione e di parallasse. Tali onde sono assolutamente refrattarie alla rappresentazione mediante la (7), e dànno luogo ai forti residui di cui l'error

(¹) Rend. Acc. Lincei, XXVII, pag. 213. Per evitare che si seguiti ad insistere sopra errori elementari, solo perchè non esplicitamente confutati, vogliamo avvertire che in quella Nota, mostrando le misure di latitudine dell'A. insensibili all'onda lunare, dimostrammo anche, implicitamente, che da esse non può trasparire nessun effetto di nutazione diurna dell'asse di rotazione della Terra rispetto allo sferoide. Le stesse osservazioni di Pino potrebbero poi (sempre nei limiti della loro esattezza) far fede dell'assenza di una sensibile nutazione diurna del detto asse rispetto allo spazio, mancandovi ogni accenno al periodo euleriano dei 10 mesi. Questi teoremi dovrebbero essere familiari a chi si mette a scrivere di polodia e di marea lunare.

Avvertiamo, inoltre, che nelle stazioni internazionali, le misure intese alla scoperta di una eventualmente sensibile nutazione diurna, non furono quelle del programma ordinario dei *due gruppi*, bensì quelle dei *quattro gruppi* stellari, ove l'intervallo fra il primo e il quarto è di 6 ore, quanto bastava cioè per mettere in luce circa i $\frac{4}{3}$ della intera amplitudine della nutazione. Se questa non fu trovata, è perchè rientra nella categoria delle onde interferenti con la rifrazione zenitale, mentre la sua parte di maggior coefficiente si riversa sopra le declinazioni stellari medie, e non è quindi osservabile.

(²) In verità le osservazioni che esaminiamo non sono tante nè così precise come occorrerebbe perchè i notati fenomeni si dovessero attribuir senz'altro a variazioni effettive del zenit apparente. Gli errori stessi di misura possono dar origine, nel nostro caso, ad onde spurie, imitanti quelle di aberrazione e parallasse, ma da ciò noi vogliamo far astrazione, per descrivere il fenomeno, qual seguiterebbe a presentarsi anche nel caso ideale di misure senza errori.

medio della media mensile è espressione compendiata; residui che decisamente rivestono carattere sistematico, con accenno al periodico [1]. Ma altre onde zenitali, che hanno fase poco diversa dall'aberrazione o dalla parallasse, la equazione (7) è ben in grado di rappresentarle, poichè esse restano *assorbite* dai termini $D\pi$ e $C\Delta f$, i quali possono quindi assumere un'apparenza di realtà, ossia dar luogo a piccoli errori medî nei valori di π e Δf, senza che effettivamente vi sia nè parallasse stellare, nè residuo sensibile di aberrazione. In questa seconda categoria di onde *rappresentabili*, dobbiamo mettere anche quelle che rispetto alla parallasse o all'aberrazione hanno una differenza di fase di 180° o 12^h: le quali nel primo caso si daranno a conoscere per ciò che le loro amplitudini risulteranno negative, laddove nel secondo caso, cioè per l'aberrazione, questo criterio non regge, essendo Δf suscettibile, senza mutar natura, dell'uno e dell'altro segno.

La parallasse negativa $-0'',089$, risultante per la stella $^1/_2\,(\alpha+\delta)$ Cygni dalle osservazioni del Boccardi, vuol dunque semplicemente dire che fra le onde zenitali di Pino Torinese, ce n'è stata una della forma $0'',089 \times 0,91 \cos(\odot + 16^h + 12^h)$, essendo, come sopra s'è visto, $0,91 \cos(\odot + 16^h)$ il coefficiente di parallasse della detta stella. L'onda è però da considerare come straordinariamente amplificata dagli errori di osservazione, un'onda zenitale vera non superando di solito (in stazioni continentali) i 2 e 3 cent. di secondo [2].

(1) I detti residui nel senso II-I membro, sono, in centesimi di secondo: $+28, -5, -6, +11, +16, +18, +6, -6, -13, -20, -8, +5, +9, +1, -9, -6, -9, -5, -10, -6, -9, +1, -7, -17, +2, +13, -3, -5, +2, -7, +1, 0, -3, -3, -9, +1, +4, +1, +9, +10, -6, -12, -7, +1, +2, 0, +11, +26$.

La loro origine mal si cercherebbe nelle x internazionali, messe a base del calcolo, poichè su queste le perturbazioni zenitali di ogni singola stazione agiscono solo per la parte che non è comune alle altre (la parte comune si riversa su z) e quindi a guisa di errori accidentali, in media da tutte le stazioni si elidono.

Abbiamo avuto curiosità di ripetere il calcolo includendo nei $\Delta\varphi$ il termine z, ciò che equivale a tener conto (almeno nelle misure notturne), oltre che del tenue scorrimento periodico del centro di gravità terrestre lungo l'asse, anche e soprattutto di quella parte di refrazione zenitale esterna che è comune alle stazioni internazionali, poichè in queste tanto per la modellazione degli ambienti, quanto per la limitazione delle misure alle ore notturne, sono pressochè completamente rimosse la seconda e terza causa di perturbazione zenitale. Abbiamo trovato: e. m. di una media mensile $= \pm 0'',108$, $\Delta\varphi_0 = -0'',063 \pm \pm 0'',017$, $\mu = +0'',017 \pm 0'',021$, $\pi = -0'',104 \pm 0'',026$, $\Delta f = -0'',091 \pm 0'',026$. L'e. m. della media, variato pochissimo, fa capire che i residui sono rimasti presso a poco gli stessi. A preferenza, dunque, essi son dovuti a refrazione camerale ed all'effetto di illuminazione del fondo del cielo; però si intrecciano con altri errori così che non vi si può scorgere nessun periodo definito. I primi 6 resti sembrano anche influenzati dalla diversità dell'istrumento che servì da giugno a dicembre 1912.

(2) A falsare l'amplitudine della detta onda contribuisce poi naturalmente anche l'essere la (7) limitata a 2 soli termini periodici.

Or se la parallasse negativa è dovuta per intera alla perturbazione zenitale, diventa ovvio il sospettare che l'onda la cui semiamplitudine è $\Delta f = -0'',106$ sia anch'essa un'onda zenitale che *tiene luogo di aberrazione* senza che con l'aberrazione abbia in realtà niente a che vedere.

La grande amplitudine di questa pseudo-aberrazione non è del resto un prodotto genuino della perturbazione zenitale, poichè ha contribuito ad esagerarla la *scelta* che il Boccardi ha fatto delle misure da assoggettar al suo calcolo, come pure l'arbitraria distribuzione di pesi alle medie mensili, i quali noi abbiam mantenuti inalterati. Un Δf *più plausibile*, cioè più piccolo, ed anzi, segno a parte, della grandezza appunto che il nostro A. voleva far risultare dalle sue equazioni (4) si ottiene, infatti quando si rinunzi a qualsiasi scelta, e *tutte* le misure fatte e registrate vengano prese in conto.

Abbiamo creduto prezzo dell'opera far anche quest'altro calcolo, e non solo per le due stelle del Cigno *separatamente*, ma anche per ciascuna delle due altre stelle, limitandoci al triennio 1913-15, già da noi studiato in ordine all'onda lunare [1].

Perchè le equazioni venissero tutte dello stesso peso, abbiam fatto riposare ciascuna sopra 20 misure consecutive, procedimento che non espone al pericolo di dover ricorrere a medie *fittizie*, come ne ha adoperate il nostro A. Naturalmente, in prossimità di quelle date, ove si presentano interruzioni o lacune, abbiam dovuto contentarci di formar le medie con un numero di misure talora parecchio minore di 20. Ma queste medie difettive, che si hanno solo per β Aurigae (4 su 17) e ψ Ursae maj. (4 su 18), sono tanto poche, che non abbiamo esitato a dar anche ad esse il peso 1, senza tema che i risultati potessero risentirne alterazione.

Riuniamo senz'altro i risultati stessi nel seguente quadro:

	N	M	φ_0	$\Delta\varphi_0$	$\pm$	μ	$\pm$	π	$\pm$	Δf	$\pm$
α Cygni . . .	23	$\pm$0,088	16'',21	−0'',009	0'',018	−0'',037	0'',027	−0'',163	0'',029	−0'',085	0'',030
δ Cygni . . .	20	0,066	16,10	−0,011	0,016	−0,022	0,022	−0,057	0,025	−0,013	0,024
ψ Ursae maj	18	0,058	16,45	−0,008	0,017	−0,015	0,020	−0,143	0,037	+0,066	0,031
β Aurigae . .	17	0,111	16,24	−0,018	0.030	−0,062	0,039	−0,576	0,127	−0,014	0,100

Sotto N sono indicati i numeri delle equazioni risolute per le diverse stelle, e la colonna M dà l'error medio di una media di 20 misure nei quattro casi. Questo errore sarebbe da attendersi $= \dfrac{0'',2}{\sqrt{20}} = 0'',045$, onde vediamo che in nessuna stella esso è portato al triplo, come accadeva per le medie di Boccardi. La rappresentazione delle osservazioni mediante la (7) è quindi migliorata, e se, come crediamo, l'insieme di *tutte* le osservazioni

(1) Le osservazioni sono attinte alle Mem. della pontif. Accad. N. L., vol. XXXII, serie II, vol. I, e da fascicolo edito dall'A. Torino, 1916.

merita più fiducia che qualsiasi sistema di osservazioni scelte, il miglioramento in parola vuol dire che le onde zenitali *irrappresentabili* erano meno rilevanti di quello che dalle medie dell'A. appariva. Però, anche così attenuati, gli M, ossia i residui della rappresentazione, sono sempre troppo grandi, e seguitano a deporre sulla insufficienza della equazione (7).

È da segnalare la radicale diversità dei Δf di α e δ Cygni, dove si manifesta la terza causa di perturbazione, menzionata nella Nota I, cioè il diverso variare lungo l'anno solare, dell'effetto d'illuminazione del fondo del cielo, per stelle di diversa luce. Curioso è poi che il medio aritmetico dei due Δf sia, prescindendo dal segno, esattamente eguale al Δf che il Boccardi erroneamente traeva in media dalle sue equazioni (4). Ma appare anche che la distanza dei due Δf è tale da non consentire la razionale formazione di un medio, e quindi neanche di fondere in medie le misure delle due stelle, come l'A. ha fatto.

Effetto costante della perturbazione zenitale sono le quattro pseudo-parallassi, o parallassi negative, il qual fenomeno è notabile specialmente in α Cygni, la stella più assiduamente osservata, ove il valore fortissimo $-0'',163$ si presenta con un e. m. minore della sua 5ª parte. È dunque qualche cosa di ben reale [1], mentre dubbia è l'onda corrispondente nella vicina δ Cygni. Reale è pure la pseudo-parallasse in ψ Ursae, ma forse illusoria affatto in β Aurigae, presso cui la determinazione doveva anche riuscirne assai incerta, per la piccolezza del fattore di parallasse ($b = 0{,}37$).

In quanto a Δf, la stella *meglio osservata*, δ Cygni, ce lo presenta con un e. m. maggiore della stessa incognita; è dunque un equivalente pratico di zero, e lo stesso può dirsi dei Δf di ψ Ursae e β Aurigae; di tal che non resta ad aspirare all'attendibilità che il forte Δf di α Cygni, e la merita forse, ma non sotto titolo di aberrazione, come sopra spiegammo.

In definitiva dunque, anche prescindendo che i quattro Δf in gran parte si compensano, nulla possiamo trovar in loro che anche solo lontanamente accenni alla necessità di un ritocco nella costante dell'aberrazione. E neanche possiam ritenerli quali *Δf peculiari* alle quattro stelle, essendo dubbio, se non già da escludere, che prolungando la serie delle osservazioni, essi convergerebbero verso valori-limiti definiti.

È bene, terminando, rammentare che il pregiudizio del Δf positivo, cui il nostro A. ha erroneamente creduto poter venire in sostegno con le poche osservazioni di Pino Torinese, sembrò, qualche ventina d'anni or sono, seriamente fondato sopra la stessa gran mole dei lavori internazionali per la polodia, quando si videro venir fuori, in tutte e 6 le stazioni settentrionali, « errori di chiusura » (*schlussfehler*) negativi. Ciò sembrava significare che

[1] Sempre astraendo dalla possibilità che si tratti di onda spuria, prodotta da errori sistematici.

sistematicamente ogni notte, il primo gruppo di stelle desse una latitudine minore che il secondo, appunto come sarebbe dovuto accadere con una costante d'aberrazione troppo piccola, in conseguenza dell'innalzarsi che fa l'*apice* (verso cui l'aberrazione è diretta) in quasi tutte le ore notturne. Senonchè, intervenute le 2 stazioni australi, vi si riscontrarono *schlussfehler* positivi, e sensibilmente eguali, in valore assoluto, a quelli delle stazioni settentrionali, ciò che bastò a far escludere la provenienza loro dall'aberrazione, e pose anzi il suggello sulla perfetta sufficienza della costante 20",47 ai bisogni dell'astronomia attuale [1].

Idromeccanica. — *Sul moto di un vortice puntiforme*. Nota I di B. Caldonazzo, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Si consideri un velo piano indefinito di liquido perfetto, limitato da una parete rigida estendentesi indefinitamente nei due sensi, con direzioni asintotiche determinate. È stato già studiato il moto provocato da un vortice puntiforme in detto velo ed il moto del vortice stesso [2].

Sostanzialmente la questione è condotta alla determinazione di una funzione che rappresenti in modo conforme il campo A del moto in un semipiano. Con questa Nota metto in rilievo la circostanza (il che a mia cognizione non è stato ancor fatto) che tale funzione è suscettibile di una notevole inter-

[1] Vedi *Resultate des Intern. Breitendienstes*, Bd. III (1909), pag. 66; Bd. IV (1911), pag. 251. Nel 1903 la correzione $\Delta f = +0'',042$ fu effettivamente apportata, abbenchè l'e. m. ($\pm 0'',015$) ne ammontasse a più del terzo, ma in seguito all'esperienza delle stazioni australi, si tornò subito al 20",47, che non c'era ragione sufficiente d'abbandonare.

Gli *schlussfehler* furono una prima imperfetta apparizione della refrazione zenitale. Nel nuovo metodo di calcolo della polodia, adottato dal prof. Wanach, essi più non figurano, ma in loro vece si studiano direttamente le differenze sistematiche fra le osservazioni di latitudine di prima sera e quelle di notte inoltrata, differenze che si è scoperto esser della forma $M + n \sin(\odot + N)$. Così da una parte gli antichi *schlussfehler* sono stati identificati con il valore di 12 M [12 essendo i gruppi stellari] e dall'altra è stata potuta mettere in evidenza una delle onde della rifrazione zenitale. L'onda è diurna, ma si sposta continuamente rispetto alle stelle fino a tornare su sè stessa in un anno, assumendo forma di termine annuo nelle declinazioni stellari. L'amplitudine ne è maggiore nelle stazioni continentali che nelle insulari. Ciò che teoricamente fa distinguere detta onda dalla nutazione diurna è il non dar luogo, nella latitudine misurata con una sola stella, a periodo quindicinale. Nella nuova forma di calcolo della polodia sono scomparsi anche i termini z, con che è tolta ai misuratori di latitudine il modo di purgar questa della refrazione zenitale media, nelle osservazioni notturne. Ma è poco male, poichè uno studio *diretto* della detta refrazione, come pure delle altre cause di variazione del zenit apparente, deve esser fatto in ogni osservatorio che si occupa di determinazioni di latitudine.

[2] E. J. Routh, *Some Applications of Coniugate Functions* [Proc. Lond. Math. Soc., 12 (1881), pag. 72]; cfr. A. E. H. Love, [Enzykl. der math. Wiss., IV, 2, pag. 111].