ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

sistematicamente ogni notte, il primo gruppo di stelle desse una latitudine minore che il secondo, appunto come sarebbe dovuto accadere con una costante d'aberrazione troppo piccola, in conseguenza dell'innalzarsi che fa l' *apice* (verso cui l'aberrazione è diretta) in quasi tutte le ore notturne. Senonchè, intervenute le 2 stazioni australi, vi si riscontrarono *schlussfehler* positivi, e sensibilmente eguali, in valore assoluto, a quelli delle stazioni settentrionali, ciò che bastò a far escludere la provenienza loro dall'aberrazione, e pose anzi il suggello sulla perfetta sufficienza della costante 20″,47 ai bisogni dell'astronomia attuale (1).

Idromeccanica. — *Sul moto di un vortice puntiforme.* Nota I di B. Caldonazzo, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Si consideri un velo piano indefinito di liquido perfetto, limitato da una parete rigida estendentesi indefinitamente nei due sensi, con direzioni asintotiche determinate. È stato già studiato il moto provocato da un vortice puntiforme in detto velo ed il moto del vortice stesso (2).

Sostanzialmente la questione è condotta alla determinazione di una funzione che rappresenti in modo conforme il campo A del moto in un semipiano. Con questa Nota metto in rilievo la circostanza (il che a mia cognizione non è stato ancor fatto) che tale funzione è suscettibile di una notevole inter-

(1) Vedi *Resultate des Intern. Breitendienstes*, Bd. III (1909), pag. 66; Bd. IV (1911), pag. 251. Nel 1903 la correzione $\Delta f = +0'',042$ fu effettivamente apportata, abbenchè l'e. m. ($\pm 0'',015$) ne ammontasse a più del terzo, ma in seguito all'esperienza delle stazioni australi, si tornò subito al 20″,47, che non c'era ragione sufficiente d'abbandonare.

Gli *schlussfehler* furono una prima imperfetta apparizione della refrazione zenitale. Nel nuovo metodo di calcolo della polodia, adottato dal prof. Wanach, essi più non figurano, ma in loro vece si studiano direttamente le differenze sistematiche fra le osservazioni di latitudine di prima sera e quelle di notte inoltrata, differenze che si è scoperto esser della forma $M + n \sin(\odot + N)$. Così da una parte gli antichi *schlussfehler* sono stati identificati con il valore di 12 M [12 essendo i gruppi stellari] e dall'altra è stata potuta mettere in evidenza una delle onde della rifrazione zenitale. L'onda è diurna, ma si sposta continuamente rispetto alle stelle fino a tornare su sè stessa in un anno, assumendo forma di termine annuo nelle declinazioni stellari. L'amplitudine ne è maggiore nelle stazioni continentali che nelle insulari. Ciò che teoricamente fa distinguere detta onda dalla nutazione diurna è il non dar luogo, nella latitudine misurata con una sola stella, a periodo quindicinale. Nella nuova forma di calcolo della polodia sono scomparsi anche i termini z, con che è tolta ai misuratori di latitudine il modo di purgar questa della refrazione zenitale media, nelle osservazioni notturne. Ma è poco male, poichè uno studio *diretto* della detta refrazione, come pure delle altre cause di variazione del zenit apparente, deve esser fatto in ogni osservatorio che si occupa di determinazioni di latitudine.

(2) E. J. Routh, *Some Applications of Coniugate Functions* [Proc. Lond. Math. Soc., 12 (1881), pag. 72]; cfr. A. E. H. Love, [Enzykl. der math. Wiss., IV, 2, pag. 111].

pretazione idrodinamica e che cioè essa è atta ad individuare in A una corrente C stazionaria irrotazionale del liquido stesso ed avente la parete rigida per linea di flusso.

Perciò, ove accanto al moto provocato dal vortice si consideri quello di una corrente *fittizia* C, il primo moto e quello del vortice stesso (è di quest'ultimo soltanto che mi occupo) si possono esprimere ed in modo semplice mediante gli elementi del moto fittizio di C.

Ne segue che per tutti quei campi A, pei quali è stata determinata una corrente C, risulta senz'altro determinato il moto di un vortice puntiforme nei campi stessi. Indipendentemente poi dalla configurazione del campo, mi è facile stabilire un raffronto tra le linee di flusso di C e le traiettorie del vortice, e mettere in evidenza che nelle eventuali posizioni d'arresto di questo le sue traiettorie devono avere un contatto con le linee di flusso di C. La stabilità dell'arresto dipende dal comportamento della curvatura di quest'ultime linee.

Il vortice, inoltre, si muove come se appartenesse ad una corrente vorticosa stazionaria, lungo ciascuna linea di flusso della quale la rotazione della velocità si conserva costante.

In una prossima Nota riprenderò la stessa questione facendo intervenire la corrente C non più in modo fittizio, ma studiando la effettiva sovrapposizione del suo moto a quello del vortice.

1. Riferiamo i punti di A ad un sistema ortogonale cartesiano sinistrorso $0, x, y$ e poniamo $z = x + iy$. Il campo A si può rappresentare in modo conforme sul semipiano $Y \geq 0$ della variabile complessa $Z = X + iY$, facendo corrispondere, a due a due, tre punti del contorno dei due campi. Sia $Z = Z(z)$ la relazione analitica che permette il passaggio da A al semipiano ed I l'intensità del vortice. Il moto di questo è definito dalla seguente funzione di corrente:

$$\psi^*(x, y) = \frac{I}{2\pi} \left\{ \log Y(x, y) - \log \left| \frac{dZ}{dz} \right| \right\}, \tag{1}$$

fissata una determinazione pei logaritmi, x ed y essendo le coordinate del vortice (¹).

Sia φ il potenziale cinetico di una corrente C, ψ la funzione di corrente: quest'ultima cresca indefinitamente lungo una generica linea $\varphi =$ cost. a partire dal valore $\psi = 0$ sulla parete rigida e si fissi una determinazione per φ. Come è noto, $\varphi + i\psi$ è funzione analitica di z, $\varphi + i\psi = f(z)$, tale che, u e v essendo le componenti cartesiane della velocità $\mathbf{V}$ di C,

$$\frac{df}{dz} = u - iv = w. \tag{2}$$

(¹) Loc. cit. (¹) a pag. 191.

Dopo ciò è manifesto che ponendo $Z = f$ si ottiene una rappresentazione conforme di A sul semipiano $Y = \geq 0$. Possiamo quindi porre in (1) $Z = f$; tenendo conto della (2) si ottiene

$$\psi^* = \frac{I}{2\pi} \log \frac{\psi}{V}, \tag{3}$$

dalla quale seguono per le componenti u^* e v^* della velocità $\mathbf{V}^*$ del vortice le espressioni

$$u^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial y} = \frac{I}{2\pi}\left\{\frac{u}{\psi} - \frac{\partial \log V}{\partial y}\right\}, \quad v^* = -\frac{\partial \psi^*}{\partial x} = \frac{I}{2\pi}\left\{\frac{v}{\psi} + \frac{\partial \log V}{\partial x}\right\}.$$

Queste si possono riassumere in forma complessa nella seguente:

$$w^* = u^* - iv^* = \frac{I}{2\pi}\left\{\frac{w}{\psi} - i\,\frac{d \log w}{dz}\right\}, \tag{4}$$

in cui è bene notare che w^* non è funzione analitica di z in causa del primo termine tra le parentesi.

Contiamo l'angolo che $\mathbf{V}$ fa con l'asse Ox positivamente nel senso antiorario, negativamente nel senso opposto e scegliamo una sua determinazione ϑ. Tenendo presente che $i \log w = \vartheta + i\tau$ ($\tau = \log V$ reale) è funzione analitica di z, alla (4) si può dare la forma vettoriale seguente:

$$\mathbf{V}^* = \frac{I}{2\pi}\left\{\frac{1}{\psi}\,\mathbf{V} - \operatorname{grad} \vartheta\right\}. \tag{4'}$$

Da questa, poichè è $\operatorname{rot} \mathbf{V} = 0$, si deduce [1]

$$\operatorname{rot} \mathbf{V}^* = \frac{I}{2\pi\,\psi^2}\,\mathbf{V} \wedge \operatorname{grad} \psi = -\frac{I}{2\pi}\left(\frac{V}{\psi}\right)^2 \mathbf{k}, \tag{5}$$

$\mathbf{k}$ essendo il vettore unitario costituente coi vettori unitari $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$, che individuano gli assi Ox, Oy, una terna ortogonale sinistrorsa.

2. Sono traiettorie del vortice le linee $\psi^* = \text{cost.}$; vale a dire, per la (3), le linee

$$V = a\psi, \tag{6}$$

[1] Cfr. C. Burali-Forti e R. Marcolongo, *Anal. Vectorielle*, I, 41, [2].

a essendo una costante positiva o nulla. Nel caso estremo $a = \infty$ si ha come traiettoria limite la parete rigida stessa $\psi = 0$. Si noti che le traiettorie del vortice sono indipendenti dalla sua intensità I, esse dipendono soltanto dalla configurazione del campo.

Se si segue il vortice lungo la sua traiettoria, posto $\mathbf{V} = V\mathbf{t}$, per la (6) la (4′) diviene

$$\mathbf{V}^{\star} = \frac{I}{2\pi} \left\{ a\mathbf{t} - \operatorname{grad} \vartheta \right\} : \tag{7}$$

quindi $\mathbf{V}^{\star}$ risulta di un vettore parallelo a $\mathbf{V}$ di modulo costante e di un vettore proporzionale a grad ϑ. La (5) diviene infine

$$\operatorname{rot} \mathbf{V}^{\star} = - \frac{I}{2\pi} a^2 \mathbf{k} ,$$

cioè il vortice si muove come se appartenesse ad una corrente vorticosa, lungo ciascuna linea di flusso della quale rot $\mathbf{V}^{\star}$ è costante.

3. Sia s l'arco contato su una generica linea $\psi =$ cost. positivamente nel senso di $\mathbf{V}$, a partire da un'origine prefissata, $\mathbf{n}$ il vettore unitario, normale a tale linea, definito da $\mathbf{n} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{t}$. Poichè ϑ e τ sono funzioni armoniche associate, si ha

$$\operatorname{grad} \vartheta = \frac{\partial \vartheta}{\partial s} \mathbf{t} - \frac{\partial \tau}{\partial s} \mathbf{n} .$$

Per questa la (7) diviene

$$\mathbf{V}^{\star} = \frac{I}{2\pi} \left\{ \left(a - \frac{\partial \vartheta}{\partial s} \right) \mathbf{t} + \frac{\partial \tau}{\partial s} \mathbf{n} \right\} ; \tag{8}$$

si ha così la scomposizione di $\mathbf{V}^{\star}$ nei suoi componenti parallelo e normale a $\mathbf{V}$. Poichè quest'ultimo generalmente è diverso da zero, le traiettorie del vortice sono in generale distinte dalle linee di flusso di C, come del resto segue anche dalla (6). Si noti che è $\frac{\partial \tau}{\partial s} \gtreqless 0$ a seconda che lungo la linea $\psi =$ cost. V cresce o decresce nel senso del moto di C. Nel caso intermedio $\frac{\partial \tau}{\partial s} = 0$, che è verificato in particolare nei punti ove V ha un massimo o un minimo, la traiettoria del vortice ha un contatto con la linea $\psi =$ cost.

4. La velocità del vortice può eventualmente annullarsi se esistono punti di A in cui

$$w = i\psi \frac{\mathrm{d} \log w}{\mathrm{d}z} , \quad \text{od anche} \quad \mathbf{V} = \psi \operatorname{grad} \vartheta ,$$

come segue da (4) e (4'), oppure, ciò che fa lo stesso, nei punti in cui

$$V = \psi \frac{\partial \vartheta}{\partial s} \quad , \quad \frac{\partial \tau}{\partial s} = 0 .$$

Perciò, ove si segua il vortice lungo una sua determinata traiettoria $V = a\psi$, sono punti d'*arresto* pel vortice quelli in cui la curvatura delle linee $\psi =$ cost. passanti per essi ha il valore a e la curvatura delle linee $\varphi =$ cost., passanti pure per essi è nulla (¹). Quest'ultima condizione, che è verificata in particolare nei punti ove le linee equipotenziali hanno un flesso, pone in evidenza che l'arresto può verificarsi soltanto nei punti ove le traiettorie del vortice e le linee $\psi =$ cost. hanno un contatto.

Se in un intervallo della traiettoria del vortice immediatamente contiguo ad un punto d'arresto Q, la velocità tende a ricondurre il vortice in Q, l'arresto è *stabile*; altrimenti è instabile (²).

Nel 1° caso si avrebbe un moto *stazionario*, provocato in A dalla presenza di un vortice fisso.

Poichè in un punto di arresto la traiettoria del vortice tocca una linea $\psi =$ cost., è necessario e sufficiente per la *stabilità* del vortice in tal punto che vi sia negativa la derivata secondo s della componente di V^* parallela a V:

$$\frac{I}{2\pi} \frac{\partial}{\partial s} \left(a - \frac{\partial \vartheta}{\partial s} \right) = - \frac{I}{2\pi} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s^2} < 0 ,$$

essendo a costante lungo s, vale a dire:

$$I \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s^2} > 0 .$$

(¹) $\frac{\partial \vartheta}{\partial s}$ è manifestamente la curvatura delle linee di flusso di C; poichè queste linee assieme alle linee equipotenziali $\varphi =$ cost. costituiscono un sistema isotermo, segue subito che $\frac{\partial \tau}{\partial s}$ è la curvatura delle linee equipotenziali.

(²) Escludiamo il caso singolare in cui $\frac{\partial \tau}{\partial s}$ è nulla lungo un tratto finito di linea di flusso di C, interno ad A. Questa circostanza è verificata (mi limito ad accennarlo) solamente quando essa vale per tutta la linea di flusso non solo ma in tutto il campo A e precisamente nel caso in cui la parete rigida è rettilinea. In tal caso l'arresto è possibile *indifferentemente* in tutti i punti della linea $\psi =$ cost. che coincide con una traiettoria del vortice.