ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

Idromeccanica. — *Sul moto variabile nei canali a fondo orizzontale.* Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio Tullio Levi-Civita.

Chiedo il permesso di intrattenere l'Accademia sopra un argomento che formò, quale caso particolare, oggetto di due Note precedenti [1].

Intendo in questa Nota di completare il risultato contenuto in quelle, riferendomi al caso in cui trattasi non più di piccoli moti ondosi, ma di moti irrotazionali (regolari) di qualsiasi natura.

1. Trattandosi di moto piano verticale, conviene ancor qui riferirsi ad una coppia di assi cartesiani $O\,; x, y$ coll'asse x orizzontale e coincidente col fondo del canale e l'asse y verticale ascendente; la scelta dell'origine è indifferente. — Sia l il pelo libero che, in condizioni statiche, è una retta parallela al fondo e che ne dista di h. In condizioni di movimento l muta forma, che in generale è variabile col tempo t; il campo ove ha sede il moto è dunque una striscia indefinita C, compresa tra il fondo $y=0$ e la linea l.

Supposto il moto regolare ed irrotazionale esistono un *potenziale di velocità* $\varphi(t\,; x, y)$ e una *funzione di corrente* $\psi(t\,; x, y)$, regolari in C in qualunque istante e che, considerate quali funzioni degli argomenti x e y, sono armoniche associate, per cui

$$f=\varphi+i\psi\,,$$

risulta funzione di $z=x+iy$, oltre che di t; inoltre, dette u, v le componenti della velocità in un punto e in un istante generico, si ha pure

$$w=u-iv=w(t\,; z)\,,$$

e

$$w=\frac{\partial f}{\partial z}\,.$$

2. Tanto sul fondo $y=0$, quanto sul pelo libero l, trattandosi di linee di flusso, deve ψ conservare, in un istante generico, il medesimo valore. Assunto, com'è ben lecito,

$$\psi=0\,,\quad \text{per } y=0\,,$$

e chiamando $q(t)$ la portata, corrispondente all'istante t, si ha

$$\psi=q(t)\,,\quad \text{sopra } l\,.$$

(1) Cisotti, *Equazione caratteristica dei piccoli moti ondosi in un canale di qualunque profondità* [questi Rendiconti, vol. XXVII (1918), Nota I, pag. 255; Nota II, pag. 312].

La linea libera l è di più isobarica, per cui, assunta $=1$ la densità del liquido, deve aversi

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}V^2+gy=\text{funzione di } t, \text{ sopra } l,$$

essendo $V^2=u^2+v^2=|w|^2$ e designando g il valore dell'accelerazione di gravità.

3. Conviene trasformare quest' ultima condizione nel modo seguente. Si rilevi anzitutto che, fissato t, lungo l tanto φ, quanto V, nonchè y si possono ritenere funzioni dell'arco s (contato a partire da un punto generico, positivamente nel senso del flusso), per cui notando che $V=\frac{\partial\varphi}{\partial s}$, dalla precedente derivando prima rispetto ad s, moltiplicando poi per $2V$ e notando che $V\frac{\partial y}{\partial s}=v$, si ottiene infine

$$\frac{\partial V^2}{\partial t}+V\frac{\partial V^2}{\partial s}+2gv=0, \text{ sopra } l.$$

4. Poniamo:

$$z=hz^*, \quad f=qf^*, \quad f^*=\varphi^*+i\psi^*;$$

per la relazione del n. 1 si ha

$$w=\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{q}{h}\frac{\partial f^*}{\partial z^*}=cw^*,$$

avendo posto

$$c=\frac{q}{h}, \quad w^*=\frac{\partial f^*}{\partial z^*}.$$

In tal modo z^*, f^*, w^* sono puri numeri, c rappresenta la velocità di una corrente di profondità h e di portata q.

Avendosi $V=cV^*$, $v=cv^*$, la relazione del n. prec. si può scrivere:

$$2c'V^{*2}+c\frac{\partial V^{*2}}{\partial t}+c^3V^*\frac{\partial V^{*2}}{\partial s}+2gv^*=0, \text{ sopra } l,$$

avendo indicato con c' la $\frac{\partial c}{\partial t}$.

5. Per la $z=hz^*$ il campo C viene rappresentato conformemente in un campo C* omotetico al primo, h essendo il rapporto di omotetia. D'altra parte la relazione

$$f^*=f^*(z^*),$$

consente di rappresentare il campo C^* nella striscia S^*: $0 \leq \psi^* \leq 1$, $-\infty \leq \varphi^* \leq +\infty$, di guisa che riferendosi nuovamente al campo C, per mezzo della $z = hz^*$, al fondo e al pelo libero del canale corrispondono in S^* rispettivamente le rette $\psi^* = 0$ e $\psi^* = 1$.

Riferendoci senz'altro alla striscia S^* conviene trasformare l'ultima condizione del n. 4; basta notare che per $\psi^* = 1$ dev'essere [n.i 1 e 4]:

$$ds = |dz| = \frac{|df|}{|w|} = h\,\frac{\partial\varphi^*}{|w^*|} = h\,\frac{\partial\varphi^*}{V^*},$$

per cui la condizione in discorso può scriversi:

$$2c' + c\,\frac{\partial \log V^{*2}}{\partial t} + \frac{c^2}{h}\,\frac{\partial V^{*2}}{\partial \varphi^*} + 2g\,\frac{v^*}{V^{*2}} = 0, \quad \text{sopra } l.$$

6. Sul fondo $y = 0$ dev'essere $v = 0$ e quindi $v^* = 0$, per cui è

$$v^* = 0 \quad \text{per} \quad \psi^* = 0,$$

cioè la funzione $w^* = u^* - iv^*$ è reale sull'asse reale del piano $\varphi^* + i\psi^*$.

In base al principio di Schwarz è consentita la continuazione analitica della funzione w^* nella striscia $S'^*: -1 \leq \psi^* \leq 0$, $-\infty \leq \varphi^* \leq +\infty$, immagine riflessa di S^* rispetto all'asse reale. Per cui, se in un generico punto $\varphi^* + i\psi^*$ di S^* è

$$w^*(t\,;\varphi^* + i\psi^*) = u^* - iv^*,$$

nel punto $\varphi^* - i\psi^*$, simmetrico del primo rispetto all'asse reale, si ha

$$w^*(t\,;\varphi^* - i\psi^*) = u^* + iv^*.$$

Da queste si ricava, riferendosi ai punti di l ove $\psi^* = 1$,

$$V^{*2} = w^*(t\,;\varphi^* + i)\,.\,w^*(t\,;\varphi^* - i),$$

$$\frac{2v^*}{V^{*2}} = -i\left\{\frac{1}{w^*(t\,;\varphi^* + i)} - \frac{1}{w^*(t\,;\varphi^* - i)}\right\},$$

l'ultima relazione del n. prec. può scriversi pertanto:

$$\begin{aligned} 2c' + c\,\frac{\partial}{\partial t}\log\left\{w^*(t\,;\varphi^* + i)\,.\,w^*(t\,;\varphi^* - i)\right\} &+ \\ + \frac{c^2}{h}\,\frac{\partial}{\partial\varphi^*}\left\{w^*(t\,;\varphi^* + i)\,.\,w^*(t\,;\varphi^* - i)\right\} &- \\ - ig\left\{\frac{1}{w^*(t\,;\varphi^* + i)} - \frac{1}{w^*(t\,;\varphi^* - i)}\right\} &= 0. \end{aligned}$$

7. La precedente, ricavata per φ^* reale, rimane valida necessariamente per qualunque valore dell'argomento appartenente al campo di esistenza. Si ha dunque, scrivendo f^* al posto di φ^*,

$$2c' + c \frac{\partial}{\partial t} \log \left\{ w^*(t; f^* + i) \,.\, w^*(t; f^* - i) \right\} + \\ + \frac{c^2}{h} \frac{\partial}{\partial f^*} \left\{ w^*(t; f^* + i) \,.\, w^*(t; f^* - i) \right\} - \\ - ig \left\{ \frac{1}{w^*(t; f^* + i)} - \frac{1}{w^*(t; f^* - i)} \right\} = 0 .$$

La questione dipende da una funzione reale c di t e da una funzione $w^*(t; f^*)$ reale sull'asse reale, regolare nella striscia $S^* + S'^*$ e soddisfacenti alla precedente equazione mista, cioè differenziale e alle differenze finite. Viceversa ogni coppia di funzioni $c(t)$ e $w^*(t; f^*)$ soddisfacenti alla precedente equazione e di più la seconda reale sull'asse reale, soddisfa alle volute condizioni al fondo e al pelo libero; la precedente *equazione è pertanto caratteristica dei moti irrotazionali di un liquido pesante in un canale a fondo orizzontale.*

8. Se si tratta di moti permanenti, per l'indipendenza esplicita dal tempo t, l'equazione caratteristica si semplifica nella seguente:

$$\frac{c^2}{h} \frac{d}{df^*} \left\{ w^*(f^* + i) \,.\, w^*(f^* - i) \right\} - ig \left\{ \frac{1}{w^*(f^* + i)} - \frac{1}{w^*(f^* - i)} \right\} = 0 .$$

Ripassando alle variabili naturali, cioè ponendo [n. 4]

$$f^* = \frac{f}{q} = \frac{f}{ch} \quad , \quad w^* = \frac{w}{c} ,$$

si ottiene

$$\frac{d}{df} \left\{ w(f + iq) \,.\, w(f - iq) \right\} - ig \left\{ \frac{1}{w(f + iq)} - \frac{1}{w(f - iq)} \right\} = 0 ,$$

che è l'equazione già stabilita da Levi-Civita ([1]).

([1]) Levi-Civita, *Sulle onde progressive di tipo permanente* [questi Rendiconti, vol. XVI (1907), pag. 783].