ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

Matematica. — *Sulle equazioni integrali.* Nota VI di PIA NALLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

21. Siano $\mu_1, \mu_2, \ldots$ costanti caratteristiche proprie relative a $K(s, t)$ e $k(s)$ e $\Gamma_1(s, t)$, $\Gamma_2(s, t), \ldots$ le corrispondenti funzioni caratteristiche; supponiamo che tra le μ_n sia contenuto lo zero, se questo è una costante caratteristica propria.

Dimostreremo che *le due costanti d e h*, determinate: la prima al n. 13 della Nota II e la seconda al n. 19 della Nota III, *soddisfano alla disuguaglianza* $\frac{1}{h} \leq d$, qualunque sieno i valori V ed X. Ci occuperemo poi in particolare del caso in cui è $hd = 1$ [1].

22. Per potere parlare delle due costanti d e h bisogna supporre

$$D_1(s, t) \neq 0.$$

Ricordiamo la relazione (4) della Nota I:

$$\int_a^b g_n(s) f_m(s)\, ds = \int_a^b g_{n-r}(s) f_{m+r}(s)\, ds,$$

che lega le iterate di due funzioni $g_0(s)$ e $f_0(s)$, e, fissato n, prendiamo $f_0(v) = B_n(v, s)$, $g_0(v) = D_1(v, t)$, dove s e t si tengono costanti.

Avremo, per $p \leq n - 1$ e $q > 0$,

$$f_p(v) = B_{n-p}(v, s) \quad , \quad g_q(v) = D_{q+1}(v, t),$$

quindi l'eguaglianza

$$\int_a^b f_0(v)\, g_{m-1}(v)\, dv = \int_a^b f_{n-1}(v)\, g_{m-n}(v)\, dv$$

diventa

$$\int_a^b B_n(v, s)\, D_m(v, t)\, dv = \int_a^b B_1(v, s)\, D_{m-n+1}(v, t)\, dv,$$

e siccome $B_1(v, s)$ non è altro che $D_1(v, s)$ e per la (24) della Nota II si ha

$$\int_a^b D_1(v, s)\, D_{m-n+1}(v, t)\, dv = D_{m-n+2}(s, t) - k(s)\, D_{m-n+1}(s, t),$$

sarà

$$D_{m-n+2}(s, t) - k(s)\, D_{m-n+1}(s, t) = \int_a^b B_n(v, s)\, D_m(v, t)\, dv.$$

[1] A questo proposito non è inutile far notare che se zero è una costante caratteristica propria, il valore di d, determinato nella Nota II, non cambia introducendo nella successione delle μ_n il termine zero, quando questo non è già contenuto nella successione stessa.

Facendo qui $m = n = 2r$ troviamo

$$(41) \qquad D_2(s, t) - k(s)\, D_1(s, t) = (hd)^r \int_a^b \frac{B_{2r}(v, s)}{h^r} \frac{D_{2r}(v, t)}{d^r}\, dv .$$

Se fosse $hd < 1$, siccome l'integrale del secondo membro al tendere di r ad ∞ converge in media verso $\int_a^b B(v, s)\, D(v, t)\, dv$, il secondo membro della (41) convergerebbe in media verso zero, quindi si avrebbe

$$D_2(s, t) - k(s)\, D_1(s, t) = 0 , \quad \text{cioè} \quad \int_a^b D_1(v, s)\, D_1(v, t)\, dv = 0$$

e finalmente $D_1(s, t) = 0$, contrariamente al supposto.

Sarà dunque $hd \geq 1$, come volevamo dimostrare.

Supponiamo ora $hd = 1$.

Dalla (41) si concluderebbe ancora $D_2(s, t) - k(s)\, D_1(s, t) = 0$ se una delle due funzioni $B(s, t)$, $D(s, t)$ fosse nulla: queste due funzioni saranno dunque entrambe non identicamente nulle. La (41) ci dà, facendo tendere r ad ∞,

$$(42) \qquad \int_a^b D_1(v, s)\, D_1(v, t)\, dv = \int_a^b B(v, s)\, D(v, t)\, dv .$$

Se una sola delle due costanti $\pm\sqrt{d}$ è costante caratteristica relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$, siccome $\sqrt{d}\, D(s, t)$ e $\sqrt{h}\, B(s, t)$ ($\sqrt{d}$ e $\sqrt{h}$ avendo lo stesso segno) sono entrambe funzioni caratteristiche corrispondenti alla costante $\sqrt{d}$, avremo

$$\sqrt{d}\, D(s, t) = \sqrt{h}\, B(s, t) = \Gamma(s, t)$$

e la (42) ci darà

$$\int_a^b D_1(v, s)\, D_1(v, t)\, dv = \int_a^b \Gamma(v, s)\, \Gamma(v, t)\, dv .$$

Ma si deve anche avere

$$\int_a^b D_1(v, s)\, \Gamma(v, t)\, dv = \int_a^b K(v, s)\, \Gamma(v, t)\, dv ,$$

quindi

$$\int_a^b D_1(v, s)\, \Gamma(v, t)\, dv = \left(\sqrt{d} - k(s)\right) \Gamma(s, t)$$

e finalmente

$$\int_a^b D_1(v, s)\, \Gamma(v, t)\, dv = \int_a^b \Gamma(v, s)\, \Gamma(v, t)\, dv .$$

Sarà dunque

$$\int_a^b (D_1(v, s) - \Gamma(v, s))(D_1(v, t) - \Gamma(v, t))\, dv = 0,$$

cioè

$$D_1(s, t) = \Gamma(s, t). \tag{43}$$

Supponiamo ora che $\sqrt{d}$ e $-\sqrt{d}$ siano entrambe costanti caratteristiche relative a $K(s, t)$ e $k(s)$.

Avremo allora

$$\sqrt{d}\, D(s, t) = \Gamma'(s, t) - \Gamma''(s, t),$$

dove $\Gamma'(s, t)$ e $\Gamma''(s, t)$ sono le funzioni caratteristiche relative a $K(s, t)$ e $k(s)$ corrispondenti alle costanti $\sqrt{d}$ e $-\sqrt{d}$, ed analogamente

$$\sqrt{h}\, B(s, t) = \Gamma'(s, t) - \Gamma''(s, t),$$

$\sqrt{d}$ e $\sqrt{h}$ essendo prese con lo stesso segno.

Per la relazione: $\int_a^b \Gamma'(v, s)\Gamma''(v, t)\, dv = 0$, si avrà dalla (42)

$$\int_a^b D_1(v, s)\, D_1(v, t)\, dv = \int_a^b \Gamma'(v, s)\, \Gamma'(v, t)\, dv + \int_a^b \Gamma''(v, s)\, \Gamma''(v, t)\, dv.$$

Ma si ha

$$\int_a^b D_1(v, s)\, \Gamma'(v, t)\, dv = \int_a^b K(v, s)\, \Gamma'(v, t)\, dv,$$

cioè

$$\int_a^b D_1(v, s)\, \Gamma'(v, t)\, dv = \left(\sqrt{d} - k(s)\right) \Gamma'(s, t),$$

od anche

$$\int_a^b D_1(v, s)\, \Gamma'(v, t)\, dv = \int_a^b \Gamma'(v, s)\, \Gamma'(v, t)\, dv,$$

ed analogamente

$$\int_a^b D_1(v, s)\, \Gamma''(v, t)\, dv = \int_a^b \Gamma''(v, s)\, \Gamma''(v, t)\, dv.$$

Sarà perciò

$$\int_a^b (D_1(v, s) - \Gamma'(v, s) - \Gamma''(v, s))(D_1(v, t) - \Gamma'(v, t) - \Gamma''(v, t))\, dv = 0$$

cioè

$$D_1(s, t) = \Gamma'(s, t) + \Gamma''(s, t). \tag{44}$$

23. Inversamente, se vale la (43), $\Gamma(s, t)$ essendo la funzione caratteristica corrispondente ad una costante μ, o se vale la (44), $\Gamma'(s, t)$ e $\Gamma''(s, t)$ essendo le funzioni caratteristiche corrispondenti a due costanti μ e $-\mu$, si ha $hd = 1$.

Infatti, se vale la (43) si ha: $D_n(s, t) = \mu^{n-1}\Gamma(s, t)$ e

$$d_n = \frac{\int_a^b\int_a^b D_n^2(s, t)\, ds\, dt}{\int_a^b\int_a^b D_{n-1}^2(s, t)\, ds\, dt} = \mu^2, \quad d = \lim_{n=\infty} d_n = \mu^2;$$

$$B_n(s, t) = \frac{1}{\mu^{n-1}}\Gamma(s, t) \quad \text{e} \quad h_n = \frac{\int_a^b\int_a^b B_n^2(s, t)\, ds\, dt}{\int_a^b\int_a^b B_{n-1}^2(s, t)\, ds\, dt} = \frac{1}{\mu^2},$$

$$h = \lim_{n=\infty} h_n = \frac{1}{\mu^2},$$

quindi $hd = 1$.

Se vale la (44) si ha: $D_n(s, t) = \mu^{n-1}\Gamma'(s, t) + (-\mu)^{n-1}\Gamma''(s, t)$, e di qui, essendo $\int_a^b\int_a^b \Gamma'(s, t)\Gamma''(s, t)\, ds\, dt = 0$, si trae $d_n = \mu^2$, $d = \mu^2$.

Si ha anche: $B_n(s, t) = \left(\frac{1}{\mu}\right)^{n-1}\Gamma'(s, t) + \left(-\frac{1}{\mu}\right)^{n-1}\Gamma''(s, t)$, quindi

$$h_n = \frac{1}{\mu^2}, \quad h = \frac{1}{\mu^2}, \quad hd = 1.$$

Abbiamo così trovato che quando è $hd = 1$ si ha

$$K(s, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(s, t) + \Gamma(s, t),$$

ovvero

$$K(s, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(s, t) + \Gamma'(s, t) + \Gamma''(s, t)$$

e $K(s, t)$ rientra dunque nella forma (11) della Nota I.

24. Facciamo qui alcune osservazioni sulle funzioni caratteristiche.

Se $\Gamma(s, t)$ è la funzione caratteristica relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$ corrispondente alla costante μ ed n è dispari,

$$R(s, t) = (\mu^{n-1} + \mu^{n-2}k(t) + \cdots + k^{n-1}(t))\,\Gamma(s, t)$$

è la funzione caratteristica relativa a $K^{(n)}(s, t)$ e $k^n(s)$ e corrispondente alla costante μ^n.

Lo stesso succede se n è pari e $-\mu$ non è costante caratteristica propria relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$ ed è inoltre $R(s, t) \neq 0$.

Se $R(s, t) = 0$ μ^n è costante caratteristica impropria relativamente a $K^{(n)}(s, t)$ e $k^n(s)$.

Se n è pari e $\Gamma'(s, t)$, $\Gamma''(s, t)$ sono le funzioni caratteristiche relative a $K(s, t)$ e $k(s)$ corrispondenti rispettivamente alle costanti μ e $-\mu$, se

$$R(s, t) = (\mu^{n-1} + \mu^{n-2} k(t) + \cdots + k^{n-1}(t))\, \Gamma'(s, t) - \\ - (\mu^{n-1} - \mu^{n-2} k(t) + \cdots - k^{n-1}(t))\, \Gamma''(s, t)$$

non è identicamente nulla, μ^n è costante caratteristica propria relativa a $K^{(n)}(s, t)$ e $k^n(s)$ ed $R(s, t)$ è la corrispondente funzione caratteristica.

Se $R(s, t) = 0$, μ^n è costante caratteristica impropria relativa a $K^{(n)}(s, t)$ e $k^n(s)$.

Inversamente: *se $R(s, t)$ è la funzione caratteristica relativa a $K^{(n)}(s, t)$ e $k^n(s)$ corrispondente alla costante μ^n ed n è dispari,*

$$\Gamma(s, t) = \frac{R(s, t)}{\mu^{n-1} + \mu^{n-2} k(t) + \cdots + k^{n-1}(t)}$$

è la funzione caratteristica relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$ corrispondente alla costante μ.

Se n è pari, si formino le due funzioni

$$R_1(s, t) = \frac{1}{2\mu}\left(\mu R(s, t) + k(s) R(s, t) + \int_a^b K(s, v) R(v, t)\, dv\right),$$

$$R_2(s, t) = \frac{1}{2\mu}\left(\mu R(s, t) - k(s) R(s, t) - \int_a^b K(s, v) R(v, t)\, dv\right).$$

Se sono entrambe non identicamente nulle μ e $-\mu$ sono costanti caratteristiche proprie relative a $K(s, t)$ e $k(s)$, e le corrispondenti funzioni caratteristiche $\Gamma'(s, t)$ e $\Gamma''(s, t)$ soddisfano alle eguaglianze

$$(\mu^{n-1} + \mu^{n-2} k(t) + \cdots + k^{n-1}(t))\, \Gamma'(s, t) = R_1(s, t),$$
$$(\mu^{n-1} - \mu^{n-2} k(t) + \cdots - k^{n-1}(t))\, \Gamma''(s, t) = -R_2(s, t).$$

Se poi una sola delle due funzioni $R_1(s, t)$, $R_2(s, t)$ non è nulla, uno solo dei valori μ e $-\mu$ è costante caratteristica propria relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$, e la corrispondente funzione caratteristica soddisfa alla prima o alla seconda delle precedenti relazioni, secondochè è $R_2(s, t) = 0$ o $R_1(s, t) = 0$.