

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. FIO BEFANI

1919

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 marzo 1919.

F. D'OVIDIO, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Chimica. — *Sulla esistenza di cloruri politionici nelle soluzioni di zolfo nel monocloruro di zolfo* ⁽¹⁾. Nota del Corrispondente G. BRUNI e di M. AMADORI.

Ricerche recentemente intraprese intorno alla vulcanizzazione a freddo della gomma elastica hanno richiamato la nostra attenzione sulla natura delle soluzioni di zolfo nel monocloruro di zolfo S_2Cl_2 .

Come è noto il monocloruro di zolfo è l'agente di questa vulcanizzazione a freddo. A tale scopo s'impiega generalmente in soluzione diluita (1 a 2%) in solventi indifferenti, p. es. in solfuro di carbonio; assai più raramente si usa sotto forma di vapori ⁽²⁾. Nella preparazione industriale del cloruro di zolfo

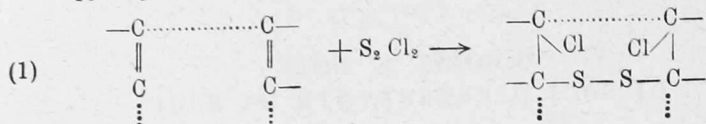
⁽¹⁾ Questo lavoro fu iniziato nell'Istituto di chimica generale della R. Università di Padova negli ultimi mesi della mia direzione (1917) e fu ultimato nel laboratorio di ricerche chimiche e chimico-fisiche della ditta Pirelli e C. in Milano, da me ora diretto. G. BRUNI.

⁽²⁾ È strano quale poca conoscenza si abbia di fenomeni così largamente applicati anche fra chimici, e come anche in molti trattati accreditati si contengano a questo proposito affermazioni erronee. Così nel *Traité de Chimie minérale* di Moissan (1904, vol. I, 351) si dice che « la soluzione satura di zolfo nel cloruro di zolfo serve a vulcanizzare il caucciù ». Analogamente nell'ultima edizione del *Treatise on Chemistry* di Roscoe e Schorlemmer (1911, vol. I, 396) si legge che « si approfitta della proprietà del cloruro di zolfo di sciogliere lo zolfo per vulcanizzare il caucciù ». Le erronee affermazioni che sia la soluzione satura dello zolfo in monocloruro che si usa nella vulcanizzazione, e che l'agente di questa vulcanizzazione sia lo zolfo sciolto nel cloruro, si trovano ripetute in varia forma nella *Modern Inorganic Chemistry* di Mellor (1916, pag. 416); nei *Principles of inorganic Chemistry* di Ostwald (4ª ediz. inglese tradotta da Findlay, 1914, pag. 329); nel *Trattato di chimica inorganica* di Molinari (4ª ediz., 1918, vol. I, pag. 372); nel *Trattato elementare di chimica inorganica* di Alex. Smith, tradotto da Montemar-

a questo scopo si cerca di evitare nel prodotto un eccesso di cloro, ossia la presenza di cloruri superiori. Il prodotto impiegato nella pratica corrisponde quindi alla formola S_2Cl_2 , o contiene un leggero eccesso di zolfo sciolto nel monocloruro, il quale in tal caso passa pure nella soluzione vulcanizzante.

In questo processo di vulcanizzazione a freddo il cloruro di zolfo si combina integralmente al caucciù; il prodotto vulcanizzato contiene infatti tanto zolfo quanto cloro e precisamente negli stessi rapporti che nel monocloruro (1).

Non intendiamo di discutere qui a fondo il meccanismo completo di tale processo, nè la costituzione definitiva del prodotto vulcanizzato, argomenti controversi su cui speriamo di ritornare presto, consideriamo però come certo che il processo stesso abbia origine in una addizione della molecola S_2Cl_2 a due doppi legami della molecola del caucciù:



analogamente a quanto accade nella formazione dei clorosolfuri di etilene e di amilene di Guthrie (2). Ciò è del resto ammesso dalla massima parte degli autori.

Come si disse, la gomma vulcanizzata a freddo contiene in genere zolfo e cloro nel rapporto S:Cl; lo zolfo è però talvolta in eccesso rispetto al cloro. È ragionevole attribuire questo eccesso all'eccesso di zolfo esistente nel liquido vulcanizzante.

Recentemente Byzow (3) ha sperimentato vulcanizzando foglie di gomma con soluzioni diluitissime (0,5 %) di cloruro di zolfo in benzina a cui aveva aggiunto appositamente quantità eccedenti di zolfo ed ha trovato che il prodotto vulcanizzato conteneva proporzioni man mano più forti di zolfo rispetto al cloro. Ecco i rapporti atomici che si calcolano dalle sue esperienze:

	Rapporto atomico Cl:S	
	nel liquido vulcanizzante	nella gomma vulcanizzata
I	2 : 2,11	2 : 3,09
II	" 2,55	" 4,95
III	" 4,22	" 7,92

tini (1912, pag. 326); nel *Trattato di chimica inorganica* di Holleman, tradotto da noi (3^a ediz., 1910, pag. 117, corretto da noi nella 4^a ediz.

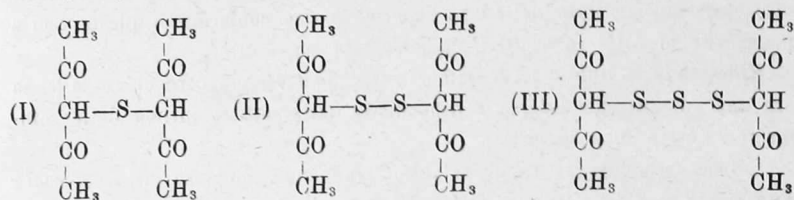
Tutti questi autori, che evidentemente si copiano uno dall'altro, confondono la vulcanizzazione a freddo il cui vero agente è il cloruro di zolfo, colla più comune e più importante vulcanizzazione a caldo, il cui agente è lo zolfo, ma che si compie a temperatura elevata e senza intervento di cloruro di zolfo.

(1) Weber, Journ. Soc. Chem. Ind., 1894; *Chemistry of India-Rubber*, 4^a ediz., Londra, 1912, pp. 97-105.

(2) Lieb. Ann. d. Chem., 113, 270.

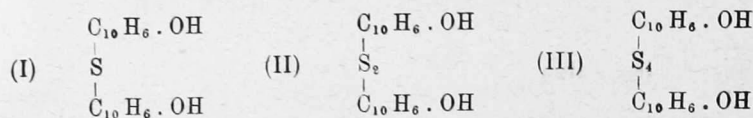
(3) Le Caoutchouc et la Gutta-percha, 1911, pag. 5291.

quella reazione, accanto al monotio- (I), e il ditio-acetilacetone (II) si forma anche, in piccola quantità, il tritio-acetilacetone (III):



il quale ultimo, secondo l'ipotesi ora emessa, si formerebbe appunto per l'azione del composto S_3Cl_2 presente nel monocloruro impiegato.

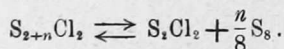
Posteriormente Henriques⁽¹⁾ trovò che per azione del cloruro di zolfo sul β -naftolo si forma, accanto ad un monotio- (I) e a un ditio-derivato (II) anche un tetratio-composto (III):



Ci è parso quindi interessante esaminare sperimentalmente la questione. A tale scopo non si presta il metodo dell'analisi termica. Il sistema *solfo-cloro* è stato studiato dettagliatamente nel tratto $\text{S}_2\text{Cl}_2 - \text{Cl}$ ⁽²⁾ di cui non ci occuperemo qui, ma il tratto $\text{S} - \text{S}_2\text{Cl}_2$ non si presta a essere studiato in tal modo, anzitutto per la troppa differenza di punto di fusione fra i due costituenti. Da un esame sommario sembra però che si abbia una sola curva di solubilità e cioè quella dello zolfo nel monocloruro.

È noto fino dalle esperienze di Rose che la soluzione satura a temperatura ordinaria contiene 66,74 % di zolfo totale che corrisponde a un rapporto: $\text{Cl}:\text{S} = 2:4,44$; e che scaldando si può ottenere una soluzione assai più ricca in zolfo, da cui per raffreddamento si ottiene lo zolfo in cristalli rombici⁽³⁾.

È quindi molto probabile che dalle miscele di zolfo e S_2Cl_2 non possa separarsi come fase solida nessun cloruro più ricco in zolfo. Ciò però non toglie che questi cloruri politionici possano esistere in soluzione come complessi più o meno dissociati secondo lo schema:



⁽¹⁾ Berichte, 27, 2993 (1894).

⁽²⁾ Vedi principalmente: Ruff e Fischer, Berichte, 36, 418 (1903); Aten, Zeitschr. f. physikal. Ch., 54, 55 (1905).

⁽³⁾ Moissan. *Traité de chimie minérale*, vol. I, pag. 349; Gmelin-Kraut, Handb. d. anorg. Chemie, 7^a ediz., 1909, vol. I-2, pag. 190.

Di tali equilibrii si hanno numerosi esempi, che è superfluo citare, in cui il complesso esistente in soluzione non arriva a separarsi allo stato solido.

Per risolvere tale questione si possono invece applicare con successo i metodi crioscopico ed ebullioscopico.

Si possono fondare su di essi due processi differenti. Il primo consiste nell'usare una delle due sostanze (qui il monoclورو di zolfo) come solvente, sciogliervi l'altra (lo zolfo) e studiare il comportamento crioscopico od ebullioscopico delle soluzioni. Date le costanti di S_2Cl_2 , non si può usare in pratica che il metodo ebullioscopico.

Orndorf e Terasse ⁽¹⁾ hanno studiato ebullioscopicamente queste soluzioni, ed hanno trovato che si hanno per lo zolfo pesi molecolari apparenti che corrispondono alla formola S_2 . I loro dati sono resi però assai incerti dalla dissociazione che S_2Cl_2 subisce per prolungata ebollizione che, come ha trovato Beckmann (v. sotto) è tale che senza precauzioni il punto di ebollizione sale di $2,5^\circ$ in 7 ore.

Beckmann ⁽²⁾ riprese la questione in esame e aggiungendo al cloruro una piccola quantità di zolfo riuscì a rallentare di molto la dissociazione. Sciogliendo ora nuove quantità di zolfo e determinando i nuovi innalzamenti, trovarono valori che conducono a pesi molecolari variabili da 33 per una concentrazione 0,37, a 80 per una concentrazione 8,58 %. Ciò corrisponde a formole medie variabili da S a $S_{2,78}$. Non vi è quindi dubbio che in queste soluzioni la molecola normale S_8 si scinde in molecole più semplici, e a diluizione sufficiente in singoli atomi.

Beckmann conclude: « Evidentemente la scissione è accompagnata da « una combinazione (Anlagerung) di atomi di zolfo al cloruro di zolfo con « formazione di cloruri politionici ». L'interpretazione è razionale e plausibile, essendo assai poco probabile una scissione in molecole monoatomiche dello zolfo libero sciolto come tale. La dimostrazione non è però rigorosa, nè tale può ottenersi con questo procedimento.

Abbiamo quindi pensato di ricorrere al secondo modo di procedere che consiste nello sciogliere contemporaneamente i due corpi (zolfo e S_2Cl_2) in un terzo solvente e determinare gli abbassamenti crioscopici, esaminando se essi siano uguali o inferiori alla somma di quelli che darebbero i due sciolti separatamente. Questo processo fu già ripetutamente usato con successo in casi analoghi ⁽³⁾.

⁽¹⁾ Amer. chem. Journ., 18, 173 (1896).

⁽²⁾ Zeitschr. f. anorg. Ch., 51, 105 (1906).

⁽³⁾ Le Blanc e Noyes, Zeitschr. f. physik. Ch., 6, 401 (1890); Paternò e Peratoner, Gazz. chim. ital., 21, I, 110 (1891); Paternò e Oliveri, Rend. Soc. Chim., Roma, 5, 211; Bruni e Borgo, questi Rendic., 16, 2° sem., 745 (1907); 18, 1° sem., 355 (1908); Pellini e Amadori, questi Rendic., 19, 1° sem., 333, 480 (1910); 21, 1° sem., 290 (1912).

Anche nell'applicazione di questo secondo metodo si può procedere in due modi diversi. Il primo consiste nel partire da soluzioni più o meno concentrate di zolfo in monocloruro prima preparate, scioglierne quantità convenienti in un solvente crioscopico adatto e determinare l'abbassamento del punto di congelamento. Se non esistono complessi, o se questi si dissociano totalmente nella soluzione, l'abbassamento dovrà essere sensibilmente la somma di quelli zolfo e monocloruro darebbero da soli. Se invece i complessi esistono e persistono totalmente o parzialmente in soluzione, si avrà un abbassamento globale proporzionalmente minore, da cui si potrà col calcolo risalire approssimativamente alla composizione statistica del complesso.

Il secondo modo di agire consiste nello sciogliere dapprima nel solvente crioscopico uno dei due componenti, p. es. il monocloruro, determinare il punto di congelamento e prendere questo come zero per le successive determinazioni; aggiungere poi alla soluzione quantità in eccesso del secondo componente, qui lo zolfo, e determinare gli ulteriori abbassamenti. Se non si formano complessi si avrà l'abbassamento normale; un abbassamento inferiore indicherà al contrario l'esistenza di complessi, di cui si potrà calcolare approssimativamente la composizione.

Nel caso attuale era preferibile seguire il secondo di questi procedimenti. Esso permette infatti di dosare con maggior precisione la proporzione delle due sostanze. Inoltre deve considerarsi che l'equilibrio espresso in 3) deve spostarsi per effetto della diluzione del solvente crioscopico nel senso della dissociazione; ora operando nel modo anzidetto è possibile aggiungere un forte eccesso di zolfo libero, assai maggiore di quello che si scioglie nel monocloruro puro e far così retrocedere la dissociazione medesima.

Come solvente crioscopico si prestava assai bene il bromoformio. Esso è anzitutto un solvente ottimo a costante assai elevata e che permette letture di grande precisione. Inoltre è già noto da accurate esperienze di Borgo e Amadori⁽¹⁾ che lo zolfo si scioglie in essi dando abbassamenti perfettamente normali e corrispondenti alla formula S_8 .

Il bromoformio e lo zolfo impiegati furono purificati nel modo indicato da Borgo e Amadori. Come costante crioscopica si tenne il valore $K = 144,1$ (Ampola e Manuelli, Borgo e Amadori). Il monocloruro fu preparato appositamente col metodo solito e purificato per distillazione. Bolliva esattamente a 138° . Esso veniva racchiuso in palline di vetro tarate e saldate alla lampada che si rompevano coll'agitatore nell'apparecchio crioscopico. Durante tutte le determinazioni si conduceva attraverso alla parte superiore dell'apparecchio una lenta corrente di aria secca.

Bisognava anzitutto verificare se il monocloruro avesse comportamento crioscopico normale. È già noto che esso dà in varii solventi inorganici ed

⁽¹⁾ Questi Rendic. 18, 1° sem., 138 (1909).

organici pesi molecolari normali corrispondenti alla formole $S_2 Cl_2$ (Oddo, Beckmann). Esso fa lo stesso sciolto in bromoformio, come risulta dalle seguenti sei determinazioni eseguite separatamente:

	Concentrazione $S_2 Cl_2$	Abbassamenti termometrici	Peso molecolare trovato
1.	1,28	1,38°	133,6
2.	1,82	1,91	137,3
3.	1,82	1,91	137,3
4.	1,82	1,90	138,0
5.	2,02	2,10	138,6
6.	2,80	2,85	141,5

media 137,7

Peso molecolare calcolato $S_2 Cl_2 = 135,04$

Dopo ciò si passò alle esperienze definitive di cui si eseguirono *dieci serie*, comprendenti *ventisette* determinazioni singole. Per ogni serie si partiva da una soluzione di concentrazione nota di $S_2 Cl_2$ a cui si aggiungevano quantità crescenti di zolfo. Per ogni concentrazione si eseguivano parecchie letture che furono sempre concordanti entro 1/100 di grado. Riportiamo i risultati nella tabella I in cui gli abbassamenti trovati sono quelli contati a partire dal punto di congelamento della soluzione di $S_2 Cl_2$.

TABELLA I.

Num. d'ordine		Concentrazioni in 100 gr. bromoformio		Abbassamenti termometrici		Differenze in meno
Serie	Determ.	S ₂ Cl ₂	Zolfo	Calcolati per S ₂	Trovati	
I	1	1,28	0,490	0,275°	0,28°	—
	2	"	2,124	1,193	1,09	0,103°
	3	"	3,753	2,108	1,76	0,348
II	4	1,28	0,939	0,527	0,49	0,037
	5	"	1,689	0,949	0,87	0,079
	6	"	2,697	1,515	1,33	0,185
III	7	1,82	1,468	0,825	0,71	0,115
	8	"	3,320	1,865	1,49	0,375
IV	9	1,82	0,881	0,495	0,46	0,035
	10	"	2,311	1,298	1,14	0,158
	11	"	3,695	2,076	1,73	0,356
V	12	1,82	1,066	0,599	0,55	0,049
	13	"	1,690	0,949	0,83	0,119
	14	"	2,407	1,352	1,16	0,192
	15	"	3,123	1,754	1,47	0,284
VI	16	1,82	1,802	1,012	0,85	0,162
	17	"	2,762	1,552	1,30	0,252
	18	"	3,294	1,851	1,51	0,341
VII	19	2,02	0,630	0,354	0,32	0,034
	20	"	1,700	0,955	0,83	0,125
	21	"	2,590	1,455	1,20	0,255
VIII	22	2,80	1,420	0,798	0,65	0,148
	23	"	2,896	1,627	1,30	0,327
IX	24	2,80	0,868	0,488	0,42	0,068
	25	"	1,998	1,122	0,90	0,222
	26	"	2,812	1,580	1,25	0,330
X	27	2,80	1,682	0,945	0,76	0,185

Abbiamo voluto vedere se il punto di congelamento varii col tempo e assieme accertarci se le tracce di umidità presenti nonostante le precauzioni potessero influire sui risultati. Abbiamo verificato ripetutamente che, anche lasciando la soluzione a sè per 24 ore, e ripetendo le determinazioni si avevano letture coincidenti, con differenze massime di $0,02^\circ$. Non vi sono dunque da temere complicazioni per questo lato; bisogna poi tener presente che queste cause d'errore porterebbero a differenze in più e non in meno.

Dall'esame delle ultime tre colonne si vede che, salvo la determinazione 1 corrispondente alla soluzione più diluita, tutte le altre hanno dato concordemente abbassamenti più piccoli dei normali. Le differenze in meno arrivano a parecchi decimi di grado (fino a $0,375^\circ$) e fino al 25 % dell'abbassamento osservato; sono dunque assai al di fuori di tutti i possibili errori di osservazione. Ciò dimostra quindi che parte dello zolfo aggiunto non si scioglie come zolfo libero, ma si combina al monocloruro per formare cloruri politionici.

Passiamo ora a calcolare approssimativamente la composizione media di questi complessi. Essa si ottiene facilmente nel modo seguente: Si calcola anzitutto la quantità C_s di zolfo disciolto come zolfo libero S_8 dalla formola $C_s = \frac{256,48}{144,1} \cdot A$. Sottraendo ora questo valore dalla concentrazione totale C_t dello zolfo aggiunto, si ha $C_c = C_t - C_s$ che rappresenta la quantità di zolfo combinata al monocloruro. Questa [quantità si può ora ricalcolare in rapporti atomici, ottenendo così il numero medio n di atomi di zolfo combinati ad ogni molecola $S_2 Cl_2$.

Diamo nella tabella II tutti i valori delle concentrazioni di $S_2 Cl_2$ e zolfo totale, libero e combinato espresse in grammimolecole e grammi-atomi e nell'ultima colonna il valore di n . La composizione media dei complessi cloruri politionici è data quindi dalla formola $S_{2+n} Cl_2$.

TABELLA II.

Nom. d'ordine		Concentrazioni in 100 gr. di solvente				$n = \frac{C_o}{C_s}$
Serie	Determin.	$S_2 Cl_2$	Zolfo totale aggiunto	Zolfo sciolto come zolfo libero	Zolfo combin. a $S_2 Cl_2$	
		mgr. molecole C_o	mgr. atomi C_t	mgr. atomi C_s	mgr. atomi $C_o = C_t - C_s$	
I	1	9,486	15,28	15,54	—	—
"	2	"	66,25	60,51	5,74	0,60
"	3	"	117,06	97,71	19,35	2,03
II	4	9,486	29,29	27,20	2,09	0,22
"	5	"	52,68	48,29	4,39	0,46
"	6	"	84,12	73,84	10,28	1,08
III	7	13,488	45,79	39,41	6,38	0,47
"	8	"	103,55	82,72	20,83	1,54
IV	9	13,488	27,48	25,53	1,95	0,14
"	10	"	72,08	63,29	8,79	0,65
"	11	"	115,25	94,37	20,88	1,54
V	12	13,488	33,25	30,53	2,72	0,20
"	13	"	52,71	46,08	6,63	0,49
"	14	"	75,08	64,40	10,68	0,79
"	15	"	97,41	81,61	15,80	1,17
VI	16	13,488	56,20	47,19	9,01	0,66
"	17	"	86,15	72,17	13,98	1,03
"	18	"	102,74	83,83	18,91	1,40
VII	19	14,970	19,65	17,76	1,89	0,26
"	20	"	53,02	46,08	6,94	0,46
"	21	"	80,78	66,61	14,17	0,94
VIII	22	20,750	44,29	36,09	8,20	0,40
"	23	"	90,33	72,17	18,16	0,87
IX	24	20,750	27,07	23,31	3,76	0,18
"	25	"	62,32	49,96	12,36	0,60
"	26	"	87,71	69,39	18,32	0,88
X	27	20,750	52,46	42,19	10,27	0,49

Nella tabella III diamo di confronto il rapporto fra il cloro e lo zolfo totale (quello del $S_2 Cl_2$ più quello aggiunto) nella soluzione e il corrispondente rapporto fra cloro e zolfo nei complessi esistenti nella soluzione stessa.

TABELLA III.

N.º d'ordine		Rapporti atomici		N.º d'ordine		Rapporti atomici	
Serie	Determ.	Cl : S totale nella soluzione	Cl : S totale combinato nei complessi	Serie	Determ.	Cl : S totale nella soluzione	Cl : S totale combinato nei complessi
I	1	3,61	2,0	VI	16	6,17	2,66
"	2	8,98	2,64	"	17	8,39	3,03
"	3	14,34	4,03	"	18	9,62	3,40
II	4	5,09	2,22	VII	19	3,31	2,26
"	5	7,55	2,46	"	20	5,54	2,46
"	6	10,87	3,08	"	21	7,39	2,94
III	7	5,39	2,47	VIII	22	4,13	2,40
"	8	9,68	3,54	"	23	6,35	2,87
IV	9	4,04	2,14	IX	24	3,34	2,18
"	10	7,37	2,65	"	25	5,05	2,60
"	11	10,54	3,54	"	66	6,23	2,88
V	12	4,46	2,20	X	27	4,52	2,49
"	13	5,91	2,49				
"	14	7,57	2,79				
"	15	9,24	3,19				

Si vede che il complesso più alto riscontrato corrisponde alla formola $S_4 Cl_2$. Come è da aspettarsi, a parità di $S_2 Cl_2$ presente, la proporzione di zolfo combinato è tanto maggiore quanto maggiore è l'eccesso di zolfo aggiunto. A parità di zolfo aggiunto tale proporzione è tanto maggiore quanto minore è la quantità di $S_2 Cl_2$ presente.

CONCLUSIONI:

1. Il monocloruro di zolfo, sciolto in bromoformio, dà abbassamenti del punto di congelamento corrispondenti alla formola $S_2 Cl_2$.
2. Miscele di $S_2 Cl_2$ e zolfo, sciolte in bromoformio, danno abbassamenti del punto di congelamento minori della somma di quelli che sarebbero dati dalle due sostanze separatamente.

3. Questo comportamento dimostra che in dette soluzioni esistono, in equilibrio coi componenti, dei *cloruri politionici*.

4. Del confronto fra gli abbassamenti trovati e quelli calcolati si può dedurre approssimativamente la formola di questi complessi.

5. Nelle soluzioni in bromoformio il più elevato di questi complessi sicuramente riscontrato è il cloruro tetrationico S_4Cl_2 , ma probabilmente esistono cloruri più ricchi in zolfo nelle proporzioni di zolfo in S_2Cl_2 .

6. Alla presenza di questi cloruri politionici è dovuta la formazione di poltio-derivati per azione (di sostituzione) di S_2Cl_2 su sostanze organiche.

7. Alla stessa causa è dovuto il fatto che nella vulcanizzazione a freddo del caucciù con S_2Cl_2 (addizione) si possono formare prodotti che contengono una proporzione di zolfo superiore al rapporto S : Cl.

Matematica. — *Alcune proprietà delle operazioni permutabili e delle sostituzioni regolari sopra lettere.* Nota di PACIFICO MAZZONI, presentata dal Socio L. BIANCHI.

In questa Nota mi propongo in primo luogo di porre in rilievo alcune relazioni numeriche tra il periodo del prodotto di due operazioni permutabili e i periodi delle due operazioni date; e di dimostrare poscia alcune proprietà delle sostituzioni regolari sopra lettere, che si trovano enunciate nel Cap. dell'opera del Burnside, *Theory of Groups*, 1911, e che sono abbastanza interessanti.

I.

1. Siano S e T due operazioni di natura qualunque e *permutabili* tra loro: dovrà esistere una legge di composizione, tale che si possano considerare i due prodotti ST e TS, e questi devono essere uguali. Sia m il periodo di S, n quello di T, e N quello di ST. Cerchiamo la relazione fra i tre periodi m, n, N .

Indichi δ il massimo comune divisore tra m e n . Dimostriamo intanto che N è multiplo di $\frac{mn}{\delta^2}$, ed è un divisore di $\frac{mn}{\delta}$.

Che N sia un divisore di $\frac{mn}{\delta}$, questo è ben noto. Ora osserviamo che dev'essere $(ST)^N = 1$, e quindi pure $(ST)^{nm} = 1$; ma siccome S e T sono permutabili, e siccome si suppone che valga la legge associativa, si ha evidentemente

$$(ST)^{nm} = S^{nm} \cdot T^{nm} = 1.$$