# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

3. Questo comportamento dimostra che in dette soluzioni esistono, in equilibrio coi componenti, dei *cloruri politionici*.

4. Del confronto fra gli abbassamenti trovati e quelli calcolati si può dedurre approssimativamente la formola di questi complessi.

5. Nelle soluzioni in bromoformio il più elevato di questi complessi sicuramente riscontrato è il cloruro tetrationico $S_4\,Cl_2$, ma probabilmente esistono cloruri più ricchi in zolfo nelle proporzioni di zolfo in $S_2\,Cl_2$.

6. Alla presenza di questi cloruri politionici è dovuta la formazione di politio-derivati per azione (di sostituzione) di $S_2\,Cl_2$ su sostanze organiche.

7. Alla stessa causa è dovuto il fatto che nella vulcanizzazione a freddo del caucciù con $S_2\,Cl_2$ (addizione) si possono formare prodotti che contengono una proporzione di zolfo superiore al rapporto S : Cl.

## Matematica. — *Alcune proprietà delle operazioni permutabili e delle sostituzioni regolari sopra lettere.* Nota di Pacifico Mazzoni, presentata dal Socio L. Bianchi.

In questa Nota mi propongo in primo luogo di porre in rilievo alcune relazioni numeriche tra il periodo del prodotto di due operazioni permutabili e i periodi delle due operazioni date; e di dimostrare poscia alcune proprietà delle sostituzioni regolari sopra lettere, che si trovano enunciate nel Cap. dell'opera del Burnside, *Theory of Groups*, 1911, e che sono abbastanza interessanti.

### I.

1. Siano S e T due operazioni di natura qualunque e *permutabili* tra loro: dovrà esistere una legge di composizione, tale che si possano considerare i due prodotti ST e TS, e questi devono essere uguali. Sia $m$ il periodo di S, $n$ quello di T, e N quello di ST. Cerchiamo la relazione fra i tre periodi $m$, $n$, N.

Indichi $\delta$ il massimo comune divisore tra $m$ e $n$. Dimostriamo intanto che N è multiplo di $\frac{mn}{\delta^2}$, ed è un divisore di $\frac{mn}{\delta}$.

Che N sia un divisore di $\frac{mn}{\delta}$, questo è ben noto. Ora osserviamo che dev'essere $(ST)^N = 1$, e quindi pure $(ST)^{Nm} = 1$; ma siccome S e T sono permutabili, e siccome si suppone che valga la legge associativa, si ha evidentemente

$$(ST)^{Nm} = S^{Nm} . T^{Nm} = 1 .$$

Ma $S^{Nm} = 1$, onde si ha pure $T^{Nm} = 1$, e quindi $Nm$ è multiplo del periodo $n$ di T. Posto $Nm = pn$, si ha

$$N \frac{m}{\delta} = p \frac{n}{\delta} ;$$

da cui, siccome $\frac{m}{\delta}$ e $\frac{n}{\delta}$ sono primi tra loro, segue che N dev'essere un multiplo di $\frac{n}{\delta}$. In modo analogo si vede che N è un multiplo di $\frac{m}{\delta}$. Segue allora che N è multiplo anche del prodotto

$$\frac{m}{\delta} \cdot \frac{n}{\delta} = \frac{mn}{\delta^2} . \quad \text{C. d. d.}$$

Posto ora $N = \frac{mn}{\delta^2} \cdot h = \frac{mn}{\delta} : \frac{\delta}{h}$, si ha

$$\frac{\delta}{h} = \frac{mn}{\delta} : N ,$$

che è un numero intero, perchè $\frac{mn}{\delta}$ è multiplo di N. Indicato con $\varrho$ il numero $\frac{\delta}{h}$, questo numero $\varrho$ è un divisore di $\delta$, e N si può scrivere

$$N = \frac{mn}{\delta \cdot \frac{\delta}{h}} = \frac{mn}{\delta\varrho} ,$$

e abbiamo così il teorema seguente:

*Se* S *e* T *sono due operazioni permutabili, se $m$ è il periodo di* S, *e $n$ quello di* T, *se $\delta$ è il massimo comune divisore tra $m$ e $n$, il periodo* N *del prodotto* ST *è un numero della forma*

$$\frac{mn}{\delta\varrho} ,$$

*dove $\varrho$ è un numero intero divisore di $\delta$ (eventualmente $\varrho = 1$, ovvero $\varrho = \delta$).*

In particolare, se $\delta = 1$, allora è pure $\varrho = 1$, e quindi $N = mn$. Dunque:

*Se i due periodi $m$ e $n$ sono primi tra loro, allora il prodotto* ST *ha il periodo uguale a $mn$.*

*Se però i due gruppi ciclici* $\{S\}$ *e* $\{T\}$ *generati dalle potenze di* S *e di* T, *non hanno operazioni comuni, oltre l'identità, allora il prodotto* ST *ha l'ordine* $\frac{rs}{\delta}$. Infatti allora si ha $(ST)^N = S^N . T^N = 1$, e quindi $S^N = T^{-N} = 1$, cioè N è multiplo di $r$ e di $s$, e perciò anche del loro m. c. m. $\frac{rs}{\delta}$ [1].

2. Quello che ci proponiamo di fase ora è di trovare dei casi in cui il valore di $\varrho$ si possa subito assegnare, e di trovare delle limitazioni per i valori che può avere $\varrho$.

Diciamo in generale $\alpha$ il minimo resto positivo di N rispetto a $m$, e $\beta$ quello di N rispetto a $n$. Vuol dire che devono esistere dei numeri interi $x$ e $y$, per cui si abbia

$$(1) \qquad N = \alpha + xm = \beta + yn, \quad \text{con} \quad 0 \leq \alpha < m, \quad \text{e} \quad 0 \leq \beta < n.$$

Dimostriamo subito che *se* $\alpha = 0$, *allora è pure* $\beta = 0$. Infatti si ha dalla (1) che $S^N = S^\alpha$, e $T^N = T^\beta$, onde se $\alpha = 0$, si ha

$$(ST)^N = S^N . T^N = S^\alpha . T^\beta = T^\beta = 1,$$

e perciò $\beta$ dev'essere multiplo di $n$; e siccome $\beta < n$, dovrà essere $\beta = 0$.
C. d. d.

Nel caso che sia $\alpha = \beta = 0$, allora N è multiplo di $m$ e di $n$, e perciò allora si ha $N = \frac{mn}{\delta}$. Viceversa, se $N = \frac{mn}{\delta}$, allora si ha $\alpha = \beta = 0$.

Torniamo al caso generale. Siccome N e $m$ sono multipli di $\frac{m}{\delta}$, a causa della (1) anche $\alpha$ sarà multiplo di $\frac{m}{\delta}$; e così pure $\beta$ è multiplo di $\frac{n}{\delta}$. Poniamo

$$\alpha = k \cdot \frac{m}{\delta}, \quad \text{e} \quad \beta = k' \frac{n}{\delta}.$$

Siccome $0 \leq \alpha < m$, sarà $0 \leq k < \delta$, e così pure $0 \leq k' < \delta$.

Le relazioni (1) si possono scrivere in generale

$$\frac{mn}{\delta\varrho} = k \frac{m}{\delta} + xm = k' \frac{n}{\delta} + yn,$$

[1] Se S e T sono due sostituzioni sopra lettere, che *non abbiano lettere comuni, allora il prodotto* ST *ha appunto l'ordine* $\frac{rs}{\delta}$.

da cui si ottengono le due seguenti:

$$(2) \qquad \frac{k}{\delta} + x = \frac{n}{\delta\varrho}, \quad \text{e} \quad \frac{k'}{\delta} + y = \frac{m}{\delta\varrho}.$$

Ora osserviamo che è $\alpha = 0$, quando sia $k = 0$; ed è $\beta = 0$, quando sia $k' = 0$. Dunque:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè sia $N = \frac{mn}{\delta}$, è che uno dei quattro numeri $\alpha, \beta, k, k'$, sia $= 0$. Se uno di questi numeri è nullo, allora sono nulli tutti quattro, e questo accade allora e allora soltanto che sia $\varrho = 1$.

Se $\varrho \neq 1$, allora $k \neq 0$, e $\frac{k}{\delta}$ è una vera frazione (propria), e perciò, a causa delle (2), anche $\frac{n}{\delta\varrho}$ sarà una vera frazione. Altrettanto dicasi per la frazione $\frac{m}{\delta\varrho}$. Abbiamo così il teorema:

*Posto l'ordine* N *di* ST *sotto la forma* $N = \frac{mn}{\delta\varrho}$, *se* $\varrho \neq 1$, *allora* $\frac{m}{\delta\varrho}$ *e* $\frac{n}{\delta\varrho}$ *sono due vere frazioni, cioè non uguali a numeri interi.*

È questa una limitazione per i valori che può avere $\varrho$: tra tutti i divisori $\varrho$ di $\delta$ bisogna escludere per $\varrho$ tutti quelli, per i quali una delle due frazioni $\frac{m}{\delta\varrho}$ e $\frac{n}{\delta\varrho}$ abbia un valore intero: a prescindere però dal valore $\varrho = 1$, che è sempre un valore possibile per $\varrho$.

3. Deduciamo alcune conseguenze da questo risultato.

*Se uno dei due numeri* $m$ *e* $n$ *è multiplo di* $\delta^2$, *allora necessariamente si ha* $N = \frac{mn}{\delta}$, *cioè uguale al minimo comune multiplo di* $m$ *e* $n$.

Infatti se $\varrho$ è un divisore qualunque di $\delta$, $\delta^2$ è multiplo di $\delta\varrho$; sicchè se ad esempio $m$ contiene $\delta^2$, allora $m$ è pure multiplo di $\delta\varrho$, e perciò $\frac{m}{\delta\varrho}$ risulta sempre intero, e l'unico valore possibile per $\varrho$ è $\varrho = 1$.

Segue in particolare: *se il periodo* $m$ *di* S *è muliplo di* $n^2$, *allora il periodo di* ST *è uguale a* $m$ (che è in tal caso il M. C. M. di $m$ e $n$).

Ricordiamo infine, a proposito di operazioni permutabili, questa proprietà: se S e T sono due operazioni permutabili, ognuna di esse è permutabile col prodotto ST, e in generale una qualunque potenza di S è permutabile con una qualunque potenza di T; di più un qualunque prodotto della forma $S^p T^q$ è permutabile con un qualunque altro della forma $S^r T^s$.