ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

Questi pochi casi, i soli che io ho potuto esaminare, mi paiono però tali da dover essere presi in seria e attenta considerazione, così che ho creduto mio stretto dovere di portarli a conoscenza dei tecnici e dei botanici; dei tecnici, perchè pensino a rimediare alla possibilità che si abbiano a ripetere; e dei botanici perchè sieno edotti di questi singolari fenomeni.

Senza arrogarmi di trattare questa questione dal punto di vista tecnico, ragionando unicamente sulla base di criterii di anatomia botanica, sottopongo però al giudizio dei tecnici queste mie osservazioni parendomi che esse abbiano un certo peso e possano consigliare un esame attento dell'argomento.

La differenza notevolissima di resistenza dei varii elementi e quindi dei varii strati che compongono i cerchi legnosi è un fatto indiscutibile, che deve *almeno* essere convenientemente considerato e studiato.

Ora che la costruzione degli aeroplani, terminata la guerra, sarà rivolta a scopi di indole essenzialmente differente da quelli bellici, non sarebbe il caso di pensare a sostituire al legno qualunque esso sia (in specie nella costruzione dei *lungheroni d'ala*), un materiale metallico di cui si possa con criterii di *assoluta certezza*, conoscere i limiti precisi di resistenza?

Qualche chilogramma di più nel peso dell'apparecchio eliminerebbe il ripetersi di disgrazie come quelle qui contemplate, le quali causarono la morte di parecchi intrepidi nostri ufficiali.

Matematica. — *Definizione geometrica di linea, superficie, solido.* Nota di C. BURALI-FORTI, presentata dal Corrrisp. R. MARCOLONGO.

Attualmente si sa dare una definizione generale ed esatta di *linea, superficie, solido,* solo ricorrendo al concetto di « *punto funzione continua* di uno, due, tre numeri reali, variabili indipendenti, aventi degli *intervalli* come campo di variabilità », ma non se ne conosce una definizione puramente geometrica ed esatta [1]. Scopo di questa Nota è appunto di definire, in generale, e sotto forma semplicissima, le *linee, superficie, solidi,* indipendentemente dal *punto funzione continua di variabili numeriche reali,* rimanendo così nel campo puramente geometrico.

È necessario basarsi su di un sistema geometrico completo e logicamente stabilito. Scegliamo quello sviluppato da M. Pieri nella sua importante

[1] Di errate se ne trovano in molti libri; ma crediamo inutile citarle e discuterle. Le seguenti definizioni [4] esprimono in termini precisi le ben note pseudo-definizioni di Euclide [II, V, I dei libri I, I, XI] senza che vi sia bisogno di definire i termini *lunghezza, larghezza, grossezza,* il che sarebbe nè facile nè opportuno.

Memoria: *La geometria elementare istituita sulle nozioni di punto e sfera* (²).

Conviene, inoltre, sviluppare, secondo le forme attuali, quanto ora indichiamo. — Si dia una qualunque delle possibili definizioni di *distanza* (o *lunghezza*) (³) in base ai concetti primitivi *punto*, *sfera*. — Si definisca, col significato usuale, la *somma*, $+$, di due distanze. Dai postulati e teoremi di Pieri risulterà che la classe *distanza* è una « classe di grandezze omogenee rispetto alla operazione $+$ » (⁴); varranno, quindi, per essa, le ordinarie proprietà (⁴) e, in particolare, quelle, che a noi più interessano, relative ai simboli 0 (zero), $>$, $<$, l', l_1 (*limite superiore* ed *inferiore*).

Traducendo in simboli ideografici, faremo uso delle notazioni ordinarie (⁵) ed inoltre delle seguenti che sono in parte note (⁵):

dist $(x\,.\,y)$, « distanza del punto x dal punto y, col significato stabilito per definizione (cf. sopra) »;

$$x\,\varepsilon\,\mathrm{pnt}\,.\,u\,\varepsilon\,\mathrm{Cls'\,pnt}\,.\,\exists\,u:\supset_{x,y}:\mathrm{dist}\,(x\,.\,u)=\mathrm{l}_1\,[\mathrm{dist}\,(x\,.\,y)\,|\,y\,\text{‘}\,u]\,,$$

cioè, dist $(x\,,u)$, « distanza del punto x dalla figura (classe, non vuota, di punti) u » è il « limite inferiore delle distanze di x dai punti di u »;

$$0\,.\,\equiv\,.\,\iota\,[\mathrm{dist}\,(x\,,x)\,|\,x\,\text{‘}\,\mathrm{pnt}]\,,$$

cioè, 0, « zero », « distanza nulla », è la « distanza di un qualsiasi punto da se stesso »;

$$\mathrm{Dist}\,.\,\equiv\,.\,h\,\ni\,\exists\,(x\,,y)\,\ni\,[x\,.\,y\,\varepsilon\,\mathrm{pnt}\,.\,x\,-\!=\,y\,.\,h=\mathrm{dist}\,(x\,,y)]\,,$$

cioè, Dist, « distanza non nulla », è la « classe formata dalle dist $(x\,,y)$, variando $x\,,y$ comunque sulla classe punto, purchè sia x diverso da y ».

* * *

Le definizioni che formano principale oggetto di questa Nota sono basate sul concetto di « figura *derivata* della figura u » che, imitando quanto si fa per le classi di numeri reali (⁵), indicheremo con δu e definiremo ponendo

$$[1]\qquad u\,\varepsilon\,\mathrm{Cls'\,pnt}\,.\,\exists\,u:\supset_u:\delta u\,.\,\equiv\,.\,\mathrm{pnt}\cap x\,\ni\,[\mathrm{dist}\,(x\,,u-\iota x)=0]\,,$$

(²) Società italiana delle Scienze (detta dei XL), Serie 3ª, Tomo XV.

(³) C. Burali-Forti, *Nuove applicazioni degli operatori* (Atti Acc. Torino, vol. IV, a. 1915, pp 669-684).

(⁴) S. Catania, *Sulle condizioni che determinano una classe di grandezze* (Atti Acc. Torino, vol. LI, pp. 27-37). — *Grandezze e numeri* (N. Giannotta, Edit., Catania, 1915). — *Lunghezze, aree, volumi* (Periodico di matematica, a. XXXII).

(⁵) *Formulario matematico*, edito per G. Peano. [Cfr. anche la 2ª edizione, interamente rifatta, del mio « manuale Hoepli » *Logica matematica* in corso di stampa e di prossima pubblicazione.

cioè, δu, « figura derivata della figura u », è la « figura i cui punti x sono soltanto quelli che hanno distanza nulla dalla figura formata dai punti di u che sono diversi da x ».

Sostituendo a $\mathrm{dist}\,(x\,, u - \iota x)$ la espressione che la definisce mediante il *limite inferiore* e lo stesso facendo per questo, la [1] assume la forma

$$[1'] \qquad \mathrm{Hp}\,[1] : \supset_u : \delta u \,.=.\, \mathrm{pnt} \cap x \ni [h \,\varepsilon\, \mathrm{Dist} \,.\supset_h.\, \exists\, u - \iota x \cap y \ni \{ \mathrm{dist}\,(x\,, y) < h \}],$$

cioè, « x è un punto di δu » solamente quando « x è un punto e comunque si fissi la distanza non nulla h (piccola a piacere), esiste sempre almeno un punto diverso da x ed appartenente ad u, che dista da x meno di h ». Ciò esprime in modo assai semplice come è formata la δu.

* * *

Seguendo le denominazioni usate per le classi di numeri reali (6), si può dire che la figura u è *perfetta* » quando « $u = \delta u$ »; « la figura u è formata da *punti isolati* » quando « u e δu non hanno elementi a comune, cioè $- \exists\, (u \cap \delta u)$ ». Ci sarà comodo introdurre le notazioni seguenti:

Fig_p, « figura perfetta »
Fig_0, « figura formata da *punti isolati* »

che definiremo ponendo

$$[2] \qquad \mathrm{Fig}_p \,.=.\, \mathrm{Cls}'\mathrm{pnt} \cap u \ni \{ \exists\, u \,.\, u = \delta u \}$$

$$[3] \qquad \mathrm{Fig}_0 \,.=.\, \mathrm{Cls}'\mathrm{pnt} \cap u \ni \{ \exists\, u \,.\, - \exists\, (u \cap \delta u) \} \quad (7)$$

cioè: Fig_p vale « classe di punti, non vuota, che coincide con la sua classe derivata »; Fig_0 vale « classe di punti, non vuota, che non ha punti a comune con la sua classe derivata ».

* * *

Definiamo ora la Fig_r « figura di specie r » che corrisponde, in *senso lato* (come vedremo), a *linea* per $r = 1$, a *superficie* per $r = 2$, a *solido* per $r = 3$. Tenendo conto della [3] possiamo comprendere in un'unica de-

(6) Cfr. (5) Editio IV, pag. 121.

(7) Eliminando il δ, e sottintesa l'ipotesi $u \,\varepsilon\, \mathrm{Cls}'\mathrm{pnt} \,.\, \exists\, u$, si ha:

$$[2'] \qquad u \,\varepsilon\, \mathrm{Fig}_p \therefore = \therefore x \,\varepsilon\, u \,.\, h \,\varepsilon\, \mathrm{Dist} \,.\supset_{u,h}.\, \exists\, u - \iota x \cap y \ni \{ \mathrm{dist}\,(x\,, y) < h \} : \mathrm{pnt} \cap x \ni \{ \mathrm{dist}\,(x\,, u) = 0 \} \,.\supset.\, u$$

$$[3'] \qquad u \,\varepsilon\, \mathrm{Fig}_0 \,.=.\, \exists\, \mathrm{Dist} \cap h \ni \{ x\,, y \,\varepsilon\, u \,.\, x - = y \,.\supset_{x,y}.\, \mathrm{dist}\,(x\,, y) \overline{\geq} h \}.$$

Si noti che $\mathrm{pnt} \cap x \ni \{ \mathrm{dist}\,(x\,, u) = 0 \}$ è la « classe limite di u », $\lambda u = u \cup \delta u$ [cfr. (5), Editio V, pag. 177, P 25·1].

finizione i tre casi $r = 1, 2, 3$:

[4] $$r \,\varepsilon\, 1 \cdots 3 : \supset_r : \mathrm{Fig}_r \,.=.\, \mathrm{Fig}_p \cap u \ni [x \,\varepsilon\, u \,.\, \supset_x .\, \exists\, \mathrm{plan} \cap a \ni \{ x \,\varepsilon\, a \,.\, (u \cap a) \,\varepsilon\, \mathrm{Fig}_{r-1} \}];$$

u è una « figura di specie r, una Fig_r, ordinatamente, per $r = 1, 2, 3$ », solamente quando: « u è, anzitutto, una figura perfetta, una Fig_p, ed inoltre: qualunque sia il punto x di u, esiste sempre almeno un piano a, uscente da x, tale che, i punti comuni ad u e ad a (intersezione di u con a) formano una figura di specie $r-1$, una Fig_{r-1} » (8).

Una *retta*, un *segmento* (estremi compresi), una *circonferenza*, ecc., sono delle Fig_1 secondo la [4]. Due o più *rette*, una *retta* e una *circonferenza*, ecc., aventi *posizioni* relative del tutto arbitrarie, formano (somma logica) delle Fig_1, ancora nel significato [4]. Vale a dire: Fig_1 corrisponde a *linea*, ma in *senso lato*, indicando, indifferentemente, ciò che nel linguaggio comune viene espresso da *linea* (semplice, limitata o pur no), *arco di linea* (estremi compresi), *sistema di linee*, *linea che si spezza*, ecc — Lo stesso può dirsi per Fig_2, Fig_3 che vengono a corrispondere a *superficie* e *solido*, ma in *senso lato*, preferibile al senso ristretto ordinario.

* * *

Si noti che nella [4] in luogo di dire « esiste almeno un piano a, uscente da x, ... », si può dire « esiste almeno una *sfera* (ente primitivo di Pieri, superficie particolare) di centro x, ... ». O, anche, conservando il termine *distanza*, alla parte a destra di $\supset_x$ della [4] si può sostituire

$$\exists\, \mathrm{Dist} \cap h \ni \{ u \cap y \ni (\mathrm{dist}(x, y) = h) \,\varepsilon\, \mathrm{Fig}_{r-1} \},$$

« esiste una distanza non nulla h tale che i punti di u aventi distanza h da x, formano una Fig_{r-1} ».

La convenienza di far uso di una, piuttosto che di un'altra, delle forme ora indicate, dipende dal modo col quale si svilupperà il sistema geometrico, mantenendo i fondamenti stabiliti da Pieri, o sostituendone altri equivalenti. Ciò che interessa constatare è la possibilità di dare sotto forma semplicissima, e nel *senso lato* che occorre spesso in geometria, la definizione puramente geometrica di *linea*, *superficie*, *solido*.

Notiamo ancora che le definizioni date in questa Nota possono estendersi agli « spazi ad n dimensioni » dei quali lo stesso Pieri ha stabiliti i fondamenti (9).

(8) Per $r = 1$ interviene la Fig_0 definita dalla [3], per $r = 2$ la Fig_1 e per $r = 3$ la Fig_2; quindi la necessità dell'*ordine* 1, 2, 3.

(9) *I principî della geometria di posizione composti con sistema logico deduttivo* (Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino, Serie II, Tomo XLVIII, a. 1897).