ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

Matematica. — *Deformazioni elastiche nelle quali una superficie o una famiglia di superficie del corpo si comportano come flessibili e inestendibili.* Nota di P. BURGATTI, presentata dal Corrispondente R. MARCOLONGO.

1. Sia $\mathbf{s}(P)$ lo spostamento che definisce una deformazione d'un corpo S, di cui P sono i suoi punti. Qual forma dove avere l'omografia della pura deformazione $D\alpha = D\frac{d\mathbf{s}}{dP}$, affinchè esista nel corpo una superficie σ che nella deformazione si comporti come se fosse flessibile e inestendibile? Manifestamente per ogni suo punto P e ogni direzione $\mathbf{a}$ tangente alla σ il coefficiente di dilatazione lineare dev'esser nullo, e nulli anche gli scorrimenti di due direzioni ortogonali $\mathbf{a}$ e $\mathbf{h}$. Dunque

$$D\alpha\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0 \qquad D\alpha\mathbf{a} \times \mathbf{h} = 0\,,$$

per ogni

$$\mathbf{a} \times \operatorname{grad}\varphi = 0 \qquad \mathbf{h} \times \operatorname{grad}\varphi = 0\,,$$

e per tutti i punti P soddisfacenti all'equazione della superficie $\varphi(P) = c$. Si trae intanto

$$D\alpha\mathbf{a} = m_a \operatorname{grad}\varphi\,;$$

ove il numero m_a dipenderà linearmente da $\mathbf{a}$, nel senso che devono essere soddisfatte le condizioni

$$m_a + m_{a_1} = m_{a+a_1} \qquad m_{sa} = s m_a\,.$$

Esso rappresenterà dunque il risultato ottenuto con un operatore lineare che applicato a vettori dà numeri; ossia sarà $m_a = \mathbf{u} \times \mathbf{a}$; per conseguenza

$$D\alpha\mathbf{a} = (\mathbf{u} \times \mathbf{a}) \operatorname{grad}\varphi = H(\mathbf{u}\,, \operatorname{grad}\varphi)\,\mathbf{a}\,,$$

valevole per ogni $\mathbf{a}$ e P soddisfacente alle condizioni

$$\mathbf{a} \times \operatorname{grad}\varphi = 0 \qquad \varphi(P) - c = 0\,.$$

Moltiplicando queste rispettivamente per $\mathbf{u}$ e $f(P)$ e sommandole con la precedente si deduce

$$D\alpha = H(\mathbf{u}\,, \operatorname{grad}\varphi) + H(\operatorname{grad}\varphi\,, \mathbf{u}) + (\varphi - c)f\,,$$

quale forma generale della $D\alpha$ cercata. Ma perchè rappresenti una pura deformazione occorre poi che soddisfi alla condizione di Saint-Venant

$$\mathrm{Rot}\, \mathrm{K}\, \mathrm{Rot}\, D\alpha = 0 .$$

Non è il caso di sviluppare questa condizione, che per la sua complessità non sarebbe utile. Preferiamo invece trattare un caso particolare.

2. La superficie $\varphi = c$ sia un piano. Se A è un suo punto e $\mathbf{k}$ un vettore unitario normale al piano, posto $(P - A) \times \mathbf{k} = z$, allora z è la distanza (con segno) da P dal detto piano, e risulta $\mathrm{grad}\, z = \mathbf{k}$. Prendiamo inoltre $f = h = \mathrm{cost}$, ed allora possiamo scrivere

$$D\alpha = hz + \mathrm{H}(\mathbf{u}\, , \mathbf{k}) + \mathrm{H}(\mathbf{k}\, , \mathbf{u}) .$$

Di qui si trae

$$\mathrm{Rot}\, D\alpha = h\mathbf{k} \wedge - \mathbf{k} \wedge \mathrm{K} \frac{d\mathbf{u}}{dP} + \mathrm{H}(\mathbf{k}\, , \mathrm{rot}\, \mathbf{u})$$

$$\mathrm{K}\, \mathrm{Rot}\, D\alpha = - h\mathbf{k} \wedge + \frac{d\mathbf{u}}{dP} . \mathbf{k} \wedge + \mathrm{H}(\mathrm{rot}\, \mathbf{u}\, , \mathbf{k}) .$$

Perciò, a norma della condizione di Saint-Venant, il vettore $\mathbf{u}$ deve soddisfare alla condizione

$$\left(\mathrm{Rot} \frac{d\mathbf{u}}{dP}\right) . \mathbf{k} \wedge = \mathbf{k} \wedge \mathrm{K}\, \mathrm{Rot} \frac{d\mathbf{u}}{dP} ,$$

che può scriversi nella forma

$$\frac{d\, \mathrm{rot}\, \mathbf{u}}{dP} . \mathbf{k} \wedge = \mathbf{k} \wedge \mathrm{K} \frac{d\, \mathrm{rot}\, \mathbf{u}}{dP} .$$

Il secondo membro è di segno opposto al coniugato del primo, perciò dev'essere

$$\frac{d\, \mathrm{rot}\, \mathbf{u}}{dP} . \mathbf{k} \wedge = \mathbf{v} \wedge ,$$

con $\mathbf{v} = m\mathbf{k}$, affinchè risulti $\mathbf{v} \wedge \mathbf{k} = 0$. E allora si deduce

$$\frac{d\, \mathrm{rot}\, \mathbf{u}}{dP} = m .$$

Ma

$$\mathrm{I}_1 \frac{d\, \mathrm{rot}\, \mathbf{u}}{dP} = \mathrm{div}\, \mathrm{rot}\, \mathbf{u} = 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{I}_1 m = 3m ;$$

dunque

$$m = 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{rot}\, \mathbf{u} = 2\mathbf{c} = \mathrm{cost.}$$

Ne consegue

$$\mathbf{u} = \mathrm{grad}\, \psi + \mathbf{c} \wedge (P - O) . \tag{1}$$

Esistono dunque delle deformazioni per cui un piano si comporta come flessibile e inestendibile; anzi, fatto $h = 0$, *tutti i piani normali a* $\mathbf{k}$ *si comportano come flessibili e inestendibili nella deformazione definita da*

(2) $$D\alpha = H(\mathbf{u}, \mathbf{k}) + H(\mathbf{k}, \mathbf{u}),$$

ove $\mathbf{u}$ *ha l'espressione* (1).

3. Supponiamo che, in quest'ultimo caso, il corpo sia mantenuto in equilibrio da opportune forze di massa e superficiali.

Sia β l'omografia delle tensioni elastiche. Se il corpo è isotropo, si ha

$$\beta = -\lambda I_1 D\alpha - 2\mu D\alpha = -2\lambda \mathbf{u} \times \mathbf{k} - 2\mu \{ H(\mathbf{u}, \mathbf{k}) + H(\mathbf{k}, \mathbf{u}) \};$$

dalla quale si trae

$$\beta\mathbf{k} = -2(\lambda + \mu)(\mathbf{u} \times \mathbf{k})\mathbf{k} - 2\mu\mathbf{u}$$

$$\beta\mathbf{a} = -2\lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{k})\mathbf{a} - 2\mu(\mathbf{u} \times \mathbf{a})\mathbf{k} \qquad \text{se } \mathbf{a} \times \mathbf{k} = 0.$$

Scegliamo $\mathbf{u}$ in guisa che sia soddisfatta la condizione $\mathbf{u} \times \mathbf{k} = 0$; ossia

(o) $$\operatorname{grad} \psi \times \mathbf{k} + \mathbf{c} \wedge (P - O) \times \mathbf{k} = 0;$$

risulta

(3) $$\beta\mathbf{k} = -2\mu\mathbf{u} \qquad \beta\mathbf{a} = -2\mu(\mathbf{u} \times \mathbf{a})\mathbf{k}$$

per ogni $\mathbf{a}$ normale a $\mathbf{k}$. Ne consegue che *in ogni elemento superficiale normale a* $\mathbf{k}$ *e in tutti gli elementi paralleli a* $\mathbf{k}$ *le tensioni elastiche sono puramente tangenziali.*

Prendendo il piano (x, y) normale a $\mathbf{k}$, la condizione (o) diventa della forma

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} + ly - mx = 0;$$

da cui si trae

$$\psi = (mx - ly)z + \chi(x, y).$$

Perchè l'equilibrio sussista occorre che le forze di massa siano definite dall'equazione

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} \beta \qquad (\text{densità} = 1).$$

Eseguendo il calcolo si trova:

$$\mathbf{F} = 2\lambda K \frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{k} + 2\mu\left(\operatorname{div} \mathbf{u} . \mathbf{k} + \frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{k}\right)$$

$$= 2\lambda\left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{k} - 2\mathbf{c} \wedge \mathbf{k}\right) + 2\mu\left(\operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{d\mathbf{u}}{dP}\right)\mathbf{k}$$

$$= 2(\lambda + \mu)\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{k} + 2\mu \operatorname{div} \mathbf{u} . \mathbf{k} - 4\lambda \mathbf{c} \times \mathbf{k}.$$

Sostituendo ad $\mathbf{u}$ la sua espressione, e tenendo presente che

$$\operatorname{grad}(mx - ly) = m\mathbf{i} - l\mathbf{j}\ ,\ \mathbf{c} \times \mathbf{k} = m\mathbf{i} - l\mathbf{j}\ ,\ (\mathbf{c} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k})$$

si deduce

$$\mathbf{F} = 4\mu(m\mathbf{i} - l\mathbf{j}) - 2\mu\,\Delta\chi \cdot \mathbf{k}\,.$$

Poichè $\Delta\chi$ è funzione soltanto di x e y, ne risulta che le forze di massa son costanti lungo ogni fibra parallela a $\mathbf{k}$, e da fibra a fibra varia soltanto la componente parallela alla fibra stessa.

Prendiamo $\chi = \frac{a}{2} r^2 + \varphi(x, y)$, ove $r^2 = x^2 + y^2$ e $\Delta\varphi = 0$; allora risulta $\Delta\chi = 2a$ (cost) e quindi

$$\mathbf{F} = 4\mu(m\mathbf{i} - l\mathbf{j} - a\mathbf{k})\,,$$

cioè la forza di massa è costante.

Così, se il corpo ha forma cilindrica con le generatrici parallele a $\mathbf{k}$ e le basi normali a $\mathbf{k}$, la deformazione in discorso potrà mantenersi con forze di massa costanti e con forze superficiali tangenziali.

4. Applichiamo tutto questo al caso del cilindro retto, fissato verticalmente alla sua base inferiore ($z = 0$) e sollecitato dalla sola gravità. Se G è il peso dell'unità di volume, risulta $\mathbf{F} = -\mathrm{G}\mathbf{k}$ e quindi $m = l = 0\,,\ a = \frac{\mathrm{G}}{4\mu}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \operatorname{grad}\chi + n(x\mathbf{j} - y\mathbf{i})\\ &= \left(\frac{\mathrm{G}}{4\pi} x - ny\right)\mathbf{i} + \left(nx + \frac{\mathrm{G}}{4\pi} y\right)\mathbf{j} + \operatorname{grad}\varphi\,.\end{aligned}$$

Da questa e dalle (3) si deduce che le forze alla base libera son definite da

$$\mathbf{F}_\sigma = \left(\frac{\mathrm{G}}{2} x - 2\mu ny\right)\mathbf{i} + \left(2\pi nx + \frac{\mathrm{G}}{2} y\right)\mathbf{j} + 2\pi \operatorname{grad}\varphi\,,$$

e sulla parete laterale da

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_\sigma = \Big[&\left(\frac{\mathrm{G}}{2} x - 2\mu ny\right)(\mathbf{i} \times \mathbf{a}) +\\ &+ \left(2\mu nx + \frac{\mathrm{G}}{2} y\right)(\mathbf{j} \times \mathbf{a}) + 2\pi(\operatorname{grad}\varphi \times \mathbf{a})\Big]\mathbf{k}\end{aligned}$$

dove $\mathbf{a}$ è la normale in un punto generico del contorno σ d'ogni sezione orizzontale. Essendo φ armonica nel piano di σ, si può calcolarla in guisa che risulti

$$2\mu \operatorname{grad}\varphi \times \mathbf{a} = -\left(\frac{\mathrm{G}}{2} x - 2\pi ny\right)(\mathbf{i} \times \mathbf{a}) - \left(2\pi nx + \frac{\mathrm{G}}{2} y\right)(\mathbf{j} \times \mathbf{a})$$

e quindi $\mathbf{F}_\sigma = 0$? Bisognerebbe risolvere il problema di determinare una funzione armonica per dati valori al contorno s della sua derivata normale. Il problema sarà possibile, se risulta

$$\int_s \operatorname{grad} \varphi \times \mathrm{a}\, ds = 0 .$$

Indicando con n la lunghezza della normale **a** a partire da P, si ha $\mathrm{a} \times \mathrm{i} = \frac{dx}{dn}$, $\mathrm{a} \times \mathrm{j} = \frac{dy}{dn}$; e quindi usando le formule

$$\int_s \Phi \frac{dx}{du} ds = -\int_\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial x} d\sigma \quad , \quad \int_s \Phi \frac{dy}{dn} ds = -\int_\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial y} d\sigma ,$$

si trova

$$\int_\sigma \operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{a}\, ds = \int_\sigma \frac{G}{2} d\sigma + \int_\sigma \frac{G}{2} d\sigma = G\sigma ;$$

che non può esser nullo. Quindi per mantenere il cilindro in equilibrio nella deformazione considerata, quando agisce la gravità, occorrono delle forze lungo la superficie laterale. Queste forze si possono scegliere con una certa arbitrarietà, purchè sia lungo il contorno

$$\int_s \mathbf{F}_\sigma \times \mathbf{k}\, ds = -G\sigma ,$$

come risulta dai calcoli precedenti. Allora l'*armonica* φ *corrispondente si determinerà risolvendo il problema di Neumann relativo a un contorno circolare*; problema che si sa risolvere.

Abbiamo così dimostrato con un interessante esempio concreto la possibilità di calcolare forze capaci di equilibrare un cilindro retto elastico in una deformazione nella quale tutte le sezioni rette si sono comportate come flessibili e inestendibili.