ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

1° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI
1919

Ottica. — *Sui fenomeni di diffrazione di Fraunhofer* [1]. Nota del Corrisp. O. Tedone.

1. Centro di scuotimento elettromagnetico infinitamente lontano. — Cercheremo di ottenere il campo elettromagnetico dovuto ad un centro di scuotimento infinitamente lontano come limite di un campo dovuto ad un centro di scuotimento al finito, quando questo centro si allontana indefinitamente in una direzione assegnata. E, per prepararci a questa ricerca, cominceremo col trattare la quistione analoga nel caso più semplice in cui, invece di propagazione di onde elettromagnetiche, si tratti della propagazione di un moto vibratorio nell'interno di un fluido elastico omogeneo. Restando in quest'ultima ipotesi, se, per rappresentare lo stato di moto, all'interno del fluido, ci serviamo dell'espressione φ del potenziale di velocità, una vibrazione armonica prodotta da un centro di scuotimento A_0, al finito, sarà rappresentata dalla formola

$$\varphi = \frac{a}{r_0} \cos 2\pi \left(\frac{\tau}{T} - \frac{r_0}{\lambda} + \delta\right) \tag{1}$$

in cui T e λ rappresentano il periodo e la lunghezza d'onda della vibrazione, r_0 la distanza del punto $A_0 \equiv (x_0 , y_0 , z_0)$ al punto d'osservazione (ξ , η , ζ), τ il tempo contato a partire da un istante che più tardi preciseremo e a e δ due costanti. Ci proponiamo, quindi, di cercare che cosa diventa la (1) quando il punto A_0 si sposta su di una retta che, possiamo sempre supporre, passi per l'origine O degli assi coordinati, allontanandosi indefinitamente da questo punto. Scegliamo, perciò, per senso positivo, su questa retta, quello che da A_0 va verso O, e indichiamo con $\alpha_0 , \beta_0 , \gamma_0$ i suoi coseni direttori; chiamiamo ω la superficie sferica di centro A_0, passante per l'origine O, τ_0 il tempo impiegato dal moto vibratorio ad andare dal centro A_0 alla sfera ω, e, precisando, indichiamo con τ il tempo impiegato dal moto stesso a passare dalla sfera ω al punto (ξ , η , ζ). Allora, l'argomento del cos, nella (1), si può scrivere

$$2\pi \left(\frac{\tau_0 + \tau}{T} - \frac{r_0}{\lambda} + \delta'\right), \tag{2}$$

δ' essendo una costante indipendente dalla posizione di A_0. E, se ϱ_0 è il

[1] Questa Nota fa seguito all'altra: *Sulla maniera di stabilire le formole fondam. dell'ordin. teoria della diffraz.*, pubblicata in questi stessi Rend., seduta 19 maggio 1918.

raggio della sfera ω, potremo scrivere

$$r_0 = \sqrt{(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 + (z_0 - \zeta)^2} =$$

$$= \varrho_0 \left[1 + 2 \frac{\alpha_0 \xi + \beta_0 \eta + \gamma_0 \zeta}{\varrho_0} + \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{\varrho_0^2} \right]^{\frac{1}{2}},$$

per cui, per ϱ_0 tendente all'infinito, si può sostituire ad r_0

$$\varrho_0 + \alpha_0 \xi + \beta_0 \eta + \gamma_0 \zeta,$$

ed il limite dell'argomento (2), per $\varrho_0 = \infty$, sarà

$$2\pi \left(\frac{\tau}{T} - \frac{\alpha_0 \xi + \beta_0 \eta + \gamma_0 \zeta}{\lambda} + \delta' \right).$$

Affinchè, ora, una vibrazione originata nel supposto punto infinitamente lontano sia percepibile nel punto (ξ, η, ζ), al finito, è necessario che la forza viva corrispondente sia infinita e dell'ordine di grandezza di r_0^2, ossia che $\frac{a}{r_0}$ sia finito. Poichè, poi, al variare di (ξ, η, ζ), restando sempre al finito, $\frac{a}{r_0}$ varierebbe di quantità infinitamente piccole, rispetto ad essa, si deve ritenere che, nelle stesse circostanze, il rapporto $\frac{a}{r_0}$ rimane costante. Quando, dunque, A_0 tende all'infinito nella maniera indicata, la (1) dev'essere sostituita dall'altra formola

$$(3) \qquad \varphi = a' \cos 2\pi \left(\frac{\tau}{T} - \frac{\alpha_0 \xi + \beta_0 \eta + \gamma_0 \zeta}{\lambda} + \delta' \right)$$

a' essendo una nuova costante.

Se poi si suppone che A_0, in ogni sua posizione al finito e, quindi, anche al limite, emetta, non una sola vibrazione armonica, ma un gruppo qualunque di tali vibrazioni, al posto della (1), si avrà la formola più generale

$$(4) \qquad \varphi = \frac{1}{r_0} F \left(\tau - \frac{r_0}{C} \right),$$

F essendo il simbolo di una determinata funzione e C la velocità di propagazione del moto all'interno del fluido; mentre, al limite, per A_0 tendente all'infinito, nelle stesse condizioni di prima, al posto della (3), si avrà la formola

$$(5) \qquad \varphi = \Phi \left(\tau - \frac{\alpha_0 \xi + \beta_0 \eta + \gamma_0 \zeta}{C} \right)$$

Φ essendo il simbolo di un'altra determinata funzione.

1'. Torniamo ora al caso delle onde elettromagnetiche. Il campo determinato dal centro di scuotimento A_0, al finito, è rappresentato dalle formole (1), ovvero (1'), dalla Nota citata. Quando, poi, si supponga che il centro A_0 tenda all'infinito nel senso negativo di una retta i cui coseni di direzione sieno $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$, come precedentemente, con considerazioni analoghe alle precedenti, si trova che il campo, al limite, sarà rappresentato dalle formole

$$(6) \qquad \mathfrak{E}_0 = \operatorname{rot}^2 \mathfrak{p} = -\Delta^2 \mathfrak{p} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{p} \quad , \quad \mathfrak{H}_0 = \frac{1}{C}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\operatorname{rot}\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial \tau},$$

$\mathfrak{p}$ essendo un vettore funzione dell'argomento

$$\tau - \frac{\alpha_0\xi + \beta_0\eta + \gamma_0\zeta}{C}.$$

Come al solito, $\mathfrak{E}_0, \mathfrak{H}_0$ sono le forze elettrica e magnetica; ε, μ le due costanti caratteristiche del mezzo (costante dielettrica e permeabilità magnetica) e C la velocità di propagazione delle onde.

Le (6) sono equivalenti alle altre

$$(7) \qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_0 = \dfrac{1}{C^2}\mathfrak{r}_0 \wedge (\mathfrak{r}_0 \wedge \mathfrak{p}'') = \dfrac{1}{C^2}[-\mathfrak{p}'' + \mathfrak{r}_0(\mathfrak{r}_0 \times \mathfrak{p}'')], \\[2ex] \mathfrak{H}_0 = -\dfrac{1}{C^2}\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathfrak{r}_0 \wedge \mathfrak{p}'' \end{cases}$$

$\mathfrak{r}_0$ essendo il vettore unitario di componenti $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ e $\mathfrak{p}''$ indicando la derivata seconda di $\mathfrak{p}$ rispetto a τ. E, dalle (7), si deduce

$$(8) \qquad \mathfrak{E}_0 = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\mathfrak{r}_0 \wedge \mathfrak{H}_0 \quad , \quad \mathfrak{H}_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathfrak{r}_0 \wedge \mathfrak{E}_0 .$$

Le formole (7) non subiscono nessuna ulteriore semplificazione in conseguenza dell'ipotesi che le radiazioni emesse da A_0 corrispondano a lunghezze d'onda infinitamente piccole. Esse rappresentano anche la soluzione più generale delle equazioni di Maxwell per onde piane propagantesi nel senso positivo di una retta di coseni direttori $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$. E l'osservazione fatta sopra è conforme al fatto noto che la teoria delle onde piane vale inalterata per ogni campo elettromagnetico indipendentemente dall'ordine di grandezza delle lunghezze d'onda delle vibrazioni che in esso si propagano.

2. Principio di Huygens in un campo elettromagnetico prodotto da un centro di scuotimento infinitamente lontano. — Le formole (5) della Nota citata valgono, evidentemente, anche nel caso in cui il centro di scuotimento A_0 è infinitamente lontano; soltanto, per $\mathfrak{E}_0, \mathfrak{H}_0$, nei primi membri, bisognerà porre le espressioni (7) del numero precedente. Se, poi,

il campo elettromagnetico è quello generato da questo solo centro di scuotimento, bisognerà, pure, porre, negli integrali, al secondo membro, $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{H}_0$, al posto di $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{H}$. In questa ipotesi, valendoci delle (8), possiamo far comparire, in ciascuna delle due formole che determinano $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{H}$, lo stesso vettore $\mathfrak{E}$ od $\mathfrak{H}$ solamente. Limitandoci a scrivere la prima di queste formole, avremo

$$(9) \qquad \mathfrak{E}(x,y,z,t) = \mathfrak{E}_0(x,y,z,t) + \\ + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left\{ \mathrm{r} \wedge \left[\mathrm{n} \wedge \left(\frac{r}{\mathrm{C}}\,\mathfrak{E}_0' + \mathfrak{E}_0 \right) \right] - \frac{r}{\mathrm{C}}\,\mathrm{n} \wedge (\mathrm{r}_0 \wedge \mathfrak{E}_0') - \right. \\ \left. - \mathrm{r}\left[\mathrm{n} \times \left(\frac{r}{\mathrm{C}}\,\mathfrak{E}_0' + \mathfrak{E}_0 \right) \right] \right\}_{\tau = t - \frac{r}{\mathrm{C}}} \frac{d\sigma}{r^2},$$

r essendo sempre il vettore unitario di componenti $\frac{\partial r}{\partial \xi}, \frac{\partial r}{\partial \eta}, \frac{\partial r}{\partial \zeta}$, n un vettore unitario normale a σ, r la distanza dei due punti (ξ, η, ζ) ed $\mathrm{A} \equiv (x, y, z)$, e l'accento, sul vettore $\mathfrak{E}_0$, indicando la derivata di questo vettore rispetto a τ. Aggiungiamo ancora che la (9) vale nell'ipotesi che la superficie σ non separi i due punti A_0 ed A; quando quest' ultimo caso si avvera, bisogna sopprimere, nel secondo membro, il termine $\mathfrak{E}_0$ fuori dell' integrale.

2'. Nel caso in cui il punto A_0, infinitamente lontano, è un centro luminoso, la (9) si semplifica perchè, con le solite considerazioni, si trova che, in essa, si possono trascurare i termini che contengono $\mathfrak{E}_0$ rispetto a quelli che contengono $\mathfrak{E}_0'$. In questo caso si può porre $\varepsilon = \mu = 1$, $\mathrm{C} = c$, e la (9) si riduce all'altra

$$(10) \qquad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + \frac{1}{4\pi c}\int_\sigma \left\{ \mathrm{r} \wedge (\mathrm{n} \wedge \mathfrak{E}_0') - \right. \\ \left. - \mathrm{n} \wedge (\mathrm{r}_0 \wedge \mathfrak{E}_0') - \mathrm{r}(\mathrm{n} \times \mathfrak{E}_0') \right\}_{\tau = t - \frac{r}{c}} \frac{d\sigma}{r} = \\ = \mathfrak{E}_0 + \frac{1}{4\pi c}\int_\sigma \left\{ (\cos \widehat{r_0 n} - \cos \widehat{rn})\, \mathfrak{E}_0' - \right. \\ \left. - (\mathrm{r} + \mathrm{r}_0)(\mathrm{n} \times \mathfrak{E}_0') + \mathrm{n}(\mathrm{r} \times \mathfrak{E}_0') \right\}_{\tau = t - \frac{r}{c}} \frac{d\sigma}{r}$$

$\widehat{r_0 n}$ ed $\widehat{rn}$ essendo gli angoli che i vettori r_0 ed r formano con n. E, se A_0 emette luce monocromatica, per cui

$$\mathfrak{E}_0 = \mathrm{a} \cos 2\pi \left(\frac{\tau}{\mathrm{T}} - \frac{\alpha_0 \xi + \beta_0 \eta + \gamma_0 \zeta}{\lambda} + \delta \right)$$

$\mathfrak{a}$ essendo un vettore costante normale ad $\mathfrak{r}_0$, la (10) si riduce alla

$$(11)\quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 - \frac{1}{2\lambda}\int_\sigma \Big\{ (\cos \widehat{r_0 n} - \cos \widehat{rn})\,\mathfrak{a} - (\mathfrak{r} + \mathfrak{r}_0)(\mathfrak{n} \times \mathfrak{a}) + \\ + \mathfrak{n}(\mathfrak{r} \times \mathfrak{a}) \Big\} \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{\mathrm{T}} - \frac{\alpha_0\xi + \beta_0\eta + \gamma_0\zeta + r}{\lambda} + \delta \right) \frac{d\sigma}{r}.$$

3. Valutazione di integrali. — La formola (11) può adoperarsi allo stesso modo dell'analoga corrispondente al caso in cui A_0 è al finito, a giustificare le leggi dell'ottica geometrica e a spiegare fenomeni di diffrazione. Per raggiungere questi scopi, bisogna risolvere una quistione fondamentale: quella di calcolare o, almeno, di valutare l'ordine di grandezza dell'integrale che compare al secondo membro della (11) stessa. La quistione è stata trattata in modo completo da Kirchhoff, nel caso in cui A_0 è al finito, applicando, al suo scopo, il metodo col quale Dirichlet ha studiato il problema della convergenza delle serie di Fourier e che contiene la sostanza del procedimento per zone di Fresnel. Conviene, e, nel nostro caso, è indispensabile, presentare le considerazioni di Kirchhoff in maniera più generale. supponendo che il fattore di $\frac{2\pi}{\lambda}$, nell'argomento del sen, sotto l'integrale a secondo membro della (11), sia una funzione u di ξ, η, ζ perfettamente arbitraria, ma con derivate finite. Si noti, per ciò, che l'equazione $u(\xi, \eta, \zeta) = \text{cost.}$ rappresenta una serie di superficie che, nel nostro caso speciale, sono paraboloidi di rotazione confocali. Si noti, pure, che si può far variare comunque σ, purchè, nel caso che σ abbia un contorno, questo contorno resti fisso ed il centro luminoso col punto d'osservazione restino sempre dalla stessa banda o da bande opposte di σ senza mutare il valore dell'integrale esteso a σ; per cui possiamo sempre supporre che σ non abbia nessuna parte in comune con una superficie $u = \text{cost.}$ e che non sia tangente ad una tale superficie in un punto interno ad essa o del suo contorno.

Per calcolare il nostro integrale si può, se occorre, spezzarlo in parti in modo che ogni sua parte sia estesa ad una parte di σ tale che, per essa, una delle coordinate, per es. ζ, si possa considerare come funzione univoca delle altre due ξ e η. Si può, quindi, introdurre su σ un sistema di linee coordinate u e v di cui il primo sistema sia formato dalle linee d'intersezione di σ con le superficie $u = \text{cost}$ e servirsi di u e v, come variabili d'integrazione, per calcolare il nostro integrale, o ciascuna delle sue parti. Affinchè ciò sia possibile bisogna poter determinare una funzione $v(\xi, \eta)$ tale che il determinante

$$\frac{d(u, v)}{d(\xi, \eta)}$$

sia diverso da zero, almeno, sulla parte di σ a cui è esteso l'integrale, e

u dovendosi considerare come funzione di ξ e η con l'intervento dell'equazione della superficie σ. Si richiede perciò che in nessun punto del campo di integrazione sia

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = 0 .$$

Tenendo conto delle restrizioni imposte a σ, si trova subito che le equazioni precedenti potranno essere soddisfatte solo se, in un punto del campo d'integrazione, è $\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial \zeta} = 0$, ovvero se il contorno di σ ha una parte in comune con una superficie $u = \text{cost.}$. Quest'ultima ipotesi, però, sarà da noi esclusa.

Quando le derivate parziali di u non sono tutte e tre nulle contemporaneamente in nessun punto del campo d'integrazione e in nessun punto vicinissimo al suo contorno, seguendo il procedimento di Kirchhoff, si vedrebbe che il nostro integrale, almeno nei casi più comuni, è dell'ordine di grandezza di λ e, quindi, trascurabile [1].

4. Sui fenomeni di diffrazione e, specialmente, su quelli di Fraunhofer. — I casi in cui le tre derivate parziali di u si annullano contemporaneamente in qualche punto vicinissimo al contorno di σ, corrispondono a quei casi in cui si possono osservare fenomeni di diffrazione. In questi casi, per determinare le condizioni ottiche in A, bisogna calcolare il valore dell'integrale che compare nel secondo membro della (11), che non è più trascurabile. Volendo restare nell'àmbito dei soli casi che sono più comunemente considerati, supporremo che A ed A_0 sieno separati da uno scherma piano perfettamente assorbente per le radiazioni luminose (perfettamente nero) e che in esso sia praticato un foro di dimensioni così piccole che, nella porzione di piano da esso limitato, si possano considerare costanti tutte le quantità che compaiono sotto l'integrale tranne quella che è divisa per λ. E supporremo allora, anche, che il piano dello scherma coincida col piano $\zeta = 0$. L'integrale sarà, quindi, esteso alla porzione di questo

[1] Ne discende che l'ordine di grandezza di un integrale della forma

$$\int_\sigma G \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{u}{\lambda} + \delta\right) d\sigma ,$$

esteso ad una porzione σ del piano $\zeta = 0$, con λ infinitesimo e G ed u funzioni di ξ, η con derivate finite, dipende esclusivamente dai punti in cui si annullano contemporaneamente $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ e $\frac{\partial u}{\partial \eta}$. Se $u(\xi, \eta)$ è nota in tutto il piano e possiede un solo di questi punti eccezionali, l'integrale stesso può estendersi ad una porzione maggiore qualunque del piano senza alterare il suo ordine di grandezza rispetto a λ. È permesso anche, nello stesso senso, sostituire ad u un'altra funzione v della stessa natura purchè coincida con u nell'intorno del punto eccezionale.

piano limitata dal foro dello scherma. Poichè, poi, per poter applicare la teoria tradizionale approssimata della diffrazione, la retta di coseni direttori $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$, uscente da A, deve passare nelle vicinanze del contorno di σ, sarà lecito, come nel caso in cui A_0 è al finito, porre

$$\mathfrak{r} + \mathfrak{r}_0 = 0 \quad , \quad \mathfrak{r} \times \mathfrak{a} = 0 \quad , \quad \cos \widehat{r_0 n} = - \cos \widehat{rn}$$

e la (11) ci darà

$$\text{(12)} \qquad \mathfrak{E} = \frac{\cos \widehat{rn}}{\lambda r} \, \mathfrak{a} \int_\sigma \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\alpha_0 \xi + \beta_0 \eta + r}{\lambda} + \delta \right) d\sigma .$$

Limitandoci a considerare luce incidente normalmente allo scherma, avremo, più semplicemente,

$$\text{(12')} \qquad \mathfrak{E} = \frac{\cos \widehat{rn}}{\lambda r} \, \mathfrak{a} \int_\sigma \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} + \delta \right) d\sigma .$$

Quando, ora, si osserva un fenomeno di diffrazione con l'aiuto di uno strumento ottico, risulta evidente che le condizioni ottiche, nel punto A di osservazione, dipendono, oltre che dalla posizione relativa di A rispetto allo scherma diffrangente, anche dalla linea di mira. Indicheremo i coseni di direzione di questa retta, ossia le componenti di $\mathfrak{r}$, con α, β, γ. I primi due di questi coseni sono infinitesimi e tali sono da considerarsi anche ξ e η, se scegliamo l'origine in un punto interno al foro. D'ordinario, poi, quando si passa a calcolare l'integrale che compare nella (12), o (12'), o integrali analoghi, si tien conto soltanto dei termini d'ordine più basso in ξ e η che provengono dallo sviluppo del fattore di $\frac{2\pi}{\lambda}$ nell'argomento del seno. Nel nostro caso, ponendo $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, potremo scrivere

$$r = \varrho \left[1 - \frac{2}{\varrho^2} (x\xi + y\eta) + \frac{1}{\varrho^2} (\xi^2 + \eta^2) \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \varrho \left[1 + \frac{2}{\varrho} (\alpha\xi + \beta\eta) + \frac{1}{\varrho^2} (\xi^2 + \eta^2) \right]^{\frac{1}{2}} = \varrho + \alpha\xi + \beta\eta + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2\varrho}$$

se teniamo conto soltanto dei termini di second'ordine in ξ e η e di quelli di prim'ordine quando sono moltiplicati per α o β.

Si distinguono, com'è noto, due categorie di fenomeni di diffrazione: quelli di Fresnel e quelli di Fraunhofer. Dal punto di vista analitico, i fenomeni di Fresnel sono caratterizzati dal fatto che i termini d'ordine più basso, nell'argomento del seno, sono di secondo grado, mentre, per i fenomeni di Fraunhofer, questi termini sono di primo grado. Accadrà il primo caso quando α e β sono infinitesimi d'ordine eguale o maggiore di ξ e η; accadrà, invece, il secondo caso quando α e β sono infinitesimi d'ordine minore di ξ e η, o per valersi di ϱ infinitamente grandi. Queste particolarità, a rigore, possono verificarsi tanto nel caso in cui il centro luminoso A_0 è infinitamente lontano, quanto in quello in cui A_0 è al finito. Possiamo, però, notare che se A_0 è infinitamente lontano, non si possono produrre fenomeni di Fresnel, e ciò nel senso che, nelle corrispondenti ipotesi, il campo d'osservazione non potrebbe essere più grande del foro diffrangente stesso, ossia infinitesimo.

Geometria. — *Fondamenti della geometria proiettivo-differenziale dei complessi e delle congruenze di rette* (1). Nota II del Corrisp. GUIDO FUBINI.

5. *Complessi lineari.* Usiamo coordinate omogenee tali che la prima x di esse valga 1; sarà $x_{rs} = X = 0$ e per (16) $b_{rs} = \lambda c_{rs}$ ove $\lambda = -\xi$. Supponiamo poi di scegliere a parametri u_1, u_2, u_3 le ultime tre coordinate proiettive p, q, r. Ricordando la definizione delle derivate covarianti, avremo per (16)

$$\binom{hk}{1} = -p_{hk} = -\Big[a_{hk}\,P + e_{hk}(\pi + \lambda p)\Big]\,;\ \binom{hk}{2} = -a_{hk}\,Q - c_{hk}(\varkappa + \lambda q)\,;$$
$$\binom{hk}{3} = -a_{hk}\,R - c_{hk}(\varrho + \lambda r)\,;$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u_h\,\partial u_k} = y_{hk} + \Sigma \binom{hk}{r} y_r = a_{hk}\Big[Y - py_1 - qy_2 - ry_3\Big] +$$
$$+ c_{hk}\Big[\eta + \lambda y - (\pi + \lambda p)\,y_1 - (\varkappa + \lambda q)\,y_2 - (\varrho + \lambda r)y_3\Big]$$

che, con notazioni, che si spiegano da sole, noi scriveremo

$$(23)\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial u_h\,\partial u_k} = a_{hk}\,\overline{Y} + c_{hk}\,\overline{\eta}\ \text{ insieme all'analoga }\ \frac{\partial^2 z}{\partial u_h\,\partial u_k} = a_{hk}\,\overline{Z} + c_{hk}\,\overline{\zeta}\,.$$

Dimostriamo che: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un complesso sia lineare è che la forma χ sia nulla.* La $(16)_{bis}$ dimostra che la condizione è necessaria. Viceversa se $\chi = 0$, cioè $c_{hk} = 0$, la (23) dimostra che, se $\overline{Y} = 0$, le derivate seconde di y sono nulle; cioè y è funzione lineare di $p = u_1$, $q = u_2$, $r = u_3$, $x = 1$; e il complesso è lineare. Invece, se $\overline{Y} \neq 0$, le (23) dimostrano che si può trovare una quantità μ tale che

(1) In questi Rendiconti, vol. XXVII, 2° sem. 1918, pp. 304-311.