ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

Matematica. — *Sopra un'equazione integro-differenziale di tipo Bôcher*. Nota del prof. G. C. Evans (di Houston, Texas), presentata dal Socio V. Volterra.

1. Questo studio, destinato per certe conferenze all'Università di California da tenersi nel 1918, ma interrotto dalla guerra e ripreso solamente adesso, tratta di certe equazioni integro-differenziali; e cioè di equazioni contenenti e le derivate e gli integrali, ma, in questo caso, integrali eseguiti sopra campi arbitrarî e variabili, invece che sopra campi determinati, come nel caso delle equazioni, già molto conosciute, del prof. Volterra. Perciò ho dato loro il nome di chi le ha dapprima considerate, del Bôcher [1].

Nel lavoro *On harmonic functions in two dimensions* [2], il Bôcher considerò l'equazione

$$\int \frac{\partial u}{\partial n} \, ds = 0 \,,$$

essendo l'integrazione eseguita sopra le circonferenze di cerchi arbitrarî, per le funzioni u continue colle loro derivate di primo ordine. Sebbene l'equazione ci riconduca alla solita equazione di Laplace e non dia risultati nuovi, il metodo adoperato non fa uso dei risultati conosciuti per l'equazione di Laplace, e si basa invece sulle proprietà dell'integrazione.

L'equazione che considereremo è l'equazione di Poisson generalizzata in modo analogo. La forma che ne risulta non si può ricondurre all'equazione differenziale presa come punto di partenza. È possibile, invece, far uso di tutta la generalità della teoria delle funzioni di variabili reali; ed i risultati ottenuti si riferiscono essenzialmente a quella generalità e alla forma integrale dell'equazione. Inoltre, facendo uso continuamente di enti a due dimensioni, la teoria si avvicina di più a quella propria al problema corrispondente nella fisica.

2. Sia Σ un campo, limitato nel piano, e $f(e)$ una funzione addittiva di insiemi normali di punti, la quale s'annulli se l'insieme e non contiene qualche punto almeno di Σ. La funzione $f(e)$ sarà la differenza di due tali funzioni di insiemi, non negative; l'esempio più importante fra gli enti fisici di una tale funzione è la carica elettrica.

(1) A questo soggetto è dedicata la conferenza IV di *The Cambridge Colloquium*, Part I, dell'Autore; New York (1918).

(2) Proceedings of the American Academy of Science (1906).

Alla $f(e)$ facciamo corrispondere una funzione di linee $F(s)$ nel piano:

$$F(s_1) = \int_\Sigma \left\{ \int_{s_1} \frac{\cos nr}{r} \, ds_1 \right\} df(e), \tag{1}$$

formula in cui n è la normale interna alla linea chiusa s_1, ed r la distanza $P_1 P$ da un punto di s_1 a un punto di Σ [1]. La funzione di linee è anche essa addittiva e di variazione limitata, differenza di due funzioni di tipo positivo.

L'equazione che risolviamo è la seguente:

$$\int_s \frac{\partial u}{\partial n} \, ds = F(s). \tag{A}$$

Per mezzo di una rete di quadrati, definita nella maniera del De la Vallée Poussin, possiamo fare il passo inverso, e da una funzione di linee addittiva e di variazione limitata ricavare una funzione addittiva di insiemi di punti. Infatti, se per caso la funzione di linee è continua (definizione del Volterra), avremo $f(e) = F(s)$, in cui e è l'insieme dei punti interni ad s.

Se da una $f(e)$ passiamo a una funzione di linee per mezzo della (1) e poi torniamo per mezzo della seconda corrispondenza di nuovo a una funzione di insiemi di punti, abbiamo quella da cui siamo partiti. Se invece partiamo da una funzione di linee, passando ad una funzione $f(e)$, e poi tornando di nuovo per mezzo della (1), ricaviamo la stessa funzione di linee per una linea in cui la funzione di linee è continua. Sopra una linea di discontinuità, però, le discontinuità vengono ripartite *in modo regolare*; se il tratto s' di curva, per esempio, ha ovunque una tangente, e fa parte allo stesso tempo dei due contorni reciprocamente esterni s_1, s_2, una metà della discontinuità sopra s' risulta compresa nella $F(s_1)$ e l'altra nella $F(s_2)$.

Si può dire dunque che consideriamo nella (A) una funzione di linee nel campo Σ di variazione limitata, addittiva, arbitraria, purchè abbia le discontinuità distribuite in modo regolare. Corrisponde ad una funzione addittiva di insiemi, completamente arbitraria nel campo Σ.

Si consideri una famiglia S di linee chiuse s, semplici e rettificabili, che contenga tutti i rettangoli e cerchi del piano, ma per ulteriori estensioni si possa limitare automaticamente per la necessità di fare convergere gli integrali curvilinei che si devono eseguire.

3. Definiamo delle derivate nelle diverse direzioni, in modo da accordarsi cogli enti a due dimensioni. Infatti, definiamo $D_h u$, derivata genera-

[1] Per uno studio di simili integrali Lebesgue-Stieltjes, vedi Daniell, Annals of Mathematics, vol. 19 (1918).

lizzata nella direzione h della u, come il limite, se tale limite esiste, dell'espressione:

$$\text{(2)} \qquad D_h u = \lim_{\sigma=0} \frac{1}{\sigma} \int_s u\, dh'$$

in cui l'angolo $hh' = \pi/2$, e con σ si denoti l'area racchiusa dal contorno s. L'area σ deve tendere allo zero in modo che il rapporto σ/d^2, ove d è il diametro di σ, non tenda allo zero.

Così si ha

$$D_x u = \lim_{\sigma=0} \frac{1}{\sigma} \int_s u\, dy \quad , \quad D_y u = -\lim_{\sigma=0} \frac{1}{\sigma} \int_s u\, dx ,$$

e la legge del parallelogramma delle forze vale per queste derivate se esistono:

$$\text{(3)} \qquad D_h u = D_x u \cos xh + D_y u \cos yh .$$

Sia φ_h componente del vettore φ in una data direzione h, integrabile nel senso di Borel sopra il piano. Se esiste una funzione u tale che si abbia

$$\int_\sigma \varphi_h\, d\sigma = \int_s u\, dh'$$

per ogni contorno s di S, e per ogni direzione h, si dirà che la u è potenziale del vettore φ. In questo caso esisterà la derivata $D_h u = \varphi_h$, e questa derivata soddisferà alla legge (3), tranne nei punti di un insieme di misura nulla, il quale si può scegliere indipendentemente dalla direzione h.

4. Se $q(P_1, P)$ è funzione continua dei punti P_1, P, si ha l'identità

$$\text{(4)} \qquad \int_{s_1} ds_1 \int_\Sigma q(P_1, P)\, df(e) = \int_\Sigma \left\{ \int_{s_1} q(P_1, P)\, ds_1 \right\} df(e) .$$

Se $p(e)$ è una funzione additiva di insiemi, non negativa, e $q(P_1, P)$ una funzione di punti, non negativa, che diviene infinita per il solo punto $P = P_1$, ma è continua in P per gli altri valori, possiamo definire

$$\begin{aligned} q^{(n)}(P_1, P) &= q(P_1, P) \quad \text{se } q \leq n , \\ &= \quad n \qquad\quad\ \text{se } q \geq n , \end{aligned}$$

e finalmente

$$\text{(5)} \qquad \int_\Sigma q(P_1, P)\, dp(e) = \lim_{n=\infty} \int_\Sigma q^{(n)}(P_1, P)\, dp(e)$$

se tale limite esiste. Sommando quattro integrali di questo tipo si riesce a definire la convergenza assoluta di $\int q\, df(e)$, in cui q non resta più non negativa, ed $f(e)$ è la solita funzione di insieme, addittiva, arbitraria.

Per mezzo di un'integrazione sopra un campo σ si dimostra che gli integrali

$$\int \frac{1}{r}\,df(e)\quad,\quad \int \frac{\cos hr}{r}\,df(e)\quad,\quad \int \log\frac{1}{r}\,df(e)$$

esistono tutti, e sono integrabili nel senso di Borel. Inoltre, la funzione di P_1, $\int \log\frac{1}{r}\,df(e)$, è integrabile (B) lungo un tratto di retta qualsiasi, o lungo una curva qualsiasi s purchè sia tale che esista una costante A:

$$A \geq \int_s \log\frac{1}{r}\,ds\,,$$

per tutti i punti P_1 di s.

Per mezzo delle equazioni (4), (5) si hanno le identità seguenti:

$$\int_{\sigma_1} d\sigma \int_\Sigma \frac{\cos hr}{r}\,df(e) = \int_{s_1} dh' \int_\Sigma \log\frac{1}{r}\,df(e) \tag{6}$$

$$\int_{s_1} ds_1 \int_\Sigma \frac{\cos nr}{r}\,df(e) = \int_\Sigma \left\{ \int_{s_1} \frac{\cos nr}{r}\,ds_1 \right\} df(e)\,. \tag{7}$$

Dalla (6) possiamo dedurre che la funzione $\int \log\frac{1}{r}\,df(e)$ è potenziale delle sue derivate generalizzate, le quali esistono e soddisfano alla legge del parallelogramma delle forze, tranne nei punti di un insieme E di misura nulla, scelto indipendentemente dalla direzione h. E per mezzo delle (1), (7) si ha che la funzione

$$u(P_1) = \frac{1}{2\pi}\int_\Sigma \log\frac{1}{r}\,df(e) \tag{B}$$

è soluzione della (A) per tutte le s_1 che non contengono punti di E in più di un insieme di misura nulla lineare.

5. Non esiste più di una sola soluzione della (A) che sia integrabile nel senso di Borel, che sia potenziale delle sue derivate, e, sopra un contorno chiuso rettificabile, tranne nei punti di un insieme di misura nulla lineare, prenda valori assegnati, supposto che la soluzione sia derivata funzionale del suo integrale a due dimensioni per tutti i punti di tale contorno, tranne per quelli di un insieme di misura nulla lineare.

Infatti, la differenza di due tali funzioni è soluzione dell'equazione

$$\int \frac{\partial u}{\partial n}\,ds = 0$$

e ha tutte le sue discontinuità rimovibili. Così si possono senz'altro applicare i metodi del Bôcher.