ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

1° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI
1919

Meccanica. — *Sull'equivalenza fra le equazioni differenziali di Hess-Schiff e quelle di Euler-Poisson nella teoria dei giroscopi asimmetrici pesanti.* Nota I di ORAZIO LAZZARINO, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Alcune proprietà delle operazioni permutabili e delle sostituzioni regolari sopra lettere.* Nota II di PACIFICO MAZZONI, presentata dal Socio L. BIANCHI.

II.

4. Le proprietà che svilupperemo ora si trovano enunciate nell'opera citata del Burnside, e siccome esse ci sembrano abbastanza interessanti, vogliamo darne qui delle semplici dimostrazioni.

Ricordiamo che si dice *regolare* una sostituzione sopra lettere, quando, decompostala in cicli, questi risultano tutti di un medesimo numero di lettere. È evidente che il periodo di una sostituzione regolare S è uguale a quello di un suo ciclo qualunque, ed è un divisore del numero totale delle lettere su cui agisce S. In particolare le sostituzioni circolari sono da riguardarsi come regolari di un solo ciclo.

Dimostriamo il seguente teorema:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè una sostituzione S *sia regolare, è che* S *sia la potenza di una sostituzione ciclica.*

Data una sostituzione ciclica qualunque C, agente sulle lettere $a_1, a_2, \dots, a_n$, è evidente che tutte le potenze di C sono sostituzioni regolari sopra le stesse lettere.

Inversamente, sia la sostituzione regolare

$$S = (a_{11}, a_{12}, \dots a_{1m}) \cdot (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2m}) \cdot (a_{31}, \dots, a_{3m}) \dots (a_{n1}, \dots, a_{nm}),$$

dove n è il numero dei cicli, e m è il periodo di S: questa si può scrivere

$$S = (a_{11}, a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n1}, a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}, a_{13}, \dots, a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{nm})^n,$$

che è la potenza $n.ma$ di una sostituzione circolare sopra le mn lettere di S. La condizione è dunque pure sufficiente. C. d. d.

Osserviamo che, sebbene possa variare la sostituzione ciclica C, di cui S è potenza, l'esponente x di C deve però essere multiplo di n. Infatti, se

$S = C^x$, si ha $S^m = C^{xm} = 1$; e siccome C ha il periodo mn, segue che xm è un multiplo di mn, e quindi che x è multiplo di n.

Corollario. *Le potenze di sostituzioni regolari sono pure regolari.*

Infatti sia S una sostituzione regolare, potenza della ciclica C, e sia $S = C^r$. Ogni potenza S^x di S è $= C^{rx}$, che è pure regolare.

5. Ora dimostriamo il teorema:

Le sole sostituzioni operanti su m lettere che sieno permutabili con una data sostituzione ciclica C *sulle stesse m lettere, sono le potenze di questa sostituzione ciclica* (1).

Sia la sostituzione ciclica $C = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$, e sia S una sostituzione qualunque permutabile con C; poniamo

$$S = \begin{pmatrix} a'_0, a'_1, \dots, a'_{n-1} \\ a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \end{pmatrix},$$

dove le lettere $a'_0, a'_1, \dots, a'_{n-1}$ sono le stesse lettere $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, in altro ordine. Si ha $CS = SC$, ossia $S^{-1}CS = C$; ma la trasformata $S^{-1}CS$ non è altro che $(a'_0, a'_1, \dots, a'_{n-1})$, che dev'essere $= C$; dunque le due sostituzioni cicliche

$$(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \quad \text{e} \quad (a'_0, a'_1, \dots, a'_{n-1})$$

coincidono. Posto che sia $a'_0 = a_r$, dev'essere $a'_{0+i} = a_{r+i}$, qualunque sia $i = 1, 2, \dots, n-1$, e quindi la S si può scrivere

$$S = \begin{pmatrix} a_r, a_{r+1}, a_{r+2}, \dots \\ a_0, a_1, a_2, \dots \end{pmatrix},$$

che è uguale a

$$(a_0, a_r, a_{2r}, a_{3r}, \dots) = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1})^r.$$

Dunque si ha $S = C^r$. C. d. d.

In generale se una sostituzione S sopra lettere è permutabile con C, e se S agisce anche su lettere diverse da $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, dal ragionamento superiore si vede che S è il prodotto di una potenza C^r per un'altra sostituzione T, agente su lettere tutte diverse da $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$. Dunque:

Le sostituzioni S *permutabili con la sostituzione ciclica*

$$C = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$$

(1) Questo teorema è un caso particolare di un altro: Se G è un gruppo abeliano transitivo di sostituzioni, e di ordine uguale al numero delle proprie lettere, le sole sostituzioni sopra quelle lettere che siano permutabili con tutte quelle di G, sono le sostituzioni di G stesso.

sono tutte e sole quelle della forma $C^r.T$, *dove* T *è una sostituzione agente su lettere tutte diverse da* $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, *e* C^r *una potenza di* C (*eventualmente* $C^r = 1$, ovvero $T = 1$).

Siccome C^r, se non è l'identità, sposta tutte quante le lettere $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, segue come corollario: *Ogni sostituzione* S *che sia permutabile con la ciclica* C, *se non agisce su lettere tutte diverse da quelle di* C, *deve spostare tutte quante le lettere di* C.

Ancora: Se una sostituzione *ciclica* S agisce sopra le lettere della ciclica C e inoltre anche sopra altre lettere, la S non può essere permutabile con C.

Infatti in tal caso la S non si può decomporre in un prodotto della forma $C^r.T$, essendo unica la decomposizione di una sostituzione in cicli.

6. Dimostriamo ora il teorema:

Se S *e* T *sono due sostituzioni regolari permutabili sopra le stesse* mn *lettere, e degli ordini* m *e* n *rispettivamente, con* m *e* n *numeri primi tra loro, il prodotto* ST *è una sostituzione ciclica sulle* mn *lettere.*

Siano

$$S = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}) \cdot (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2m}) \dots (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nm}),$$

e

$$T = (b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n}) \cdot (b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2n}) \dots (b_{m1}, b_{m2}, \dots, b_{mn})$$

le due sostituzioni permutabili date, essendo le lettere b_{ik} nient'altro che le a_{ik}, in altro ordine. Si ha $T^{-1}ST = S$; ma $T^{-1}ST$ si ottiene, sostituendo alle a_{ik} ordinatamente le lettere in cui la T porta le a_{ik} medesime; sicchè, dovendo gli n cicli di $T^{-1}ST$ coincidere con quelli di S, la T dovrà scambiare tra loro gli n cicli di S. Dimodochè se per esempio la T porta a_{11} in a_{21}, T dovrà portare le lettere del ciclo $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m})$ in quelle dell'altro $(a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2m})$; precisamente porterà a_{11} in a_{21}, a_{12} in a_{22}, ecc., a_{1m} in a_{2m}. E così in generale.

Indichiamo per semplicità con $C_1, C_2, \dots, C_n$ gli n cicli di S; su di essi la T induce dunque una certa sostituzione, che dimostreremo essere ciclica e di periodo n. Cioè dimostreremo che la T deve portare la lettera a_{11} del primo ciclo C_1 in una lettera di un altro ciclo diverso dal primo; questa seconda lettera in un'altra di un terzo ciclo diverso dai primi due, ecc., fino a ritrovare, dopo n volte, la lettera a_{11}, dopo aver preso insomma una lettera da ognuna degli n cicli $C_1, C_2, \dots, C_n$. In altre parole, faremo vedere che si possono cambiare opportunamente gli indici delle a_{ik}, in modo che quel ciclo di T che contiene a_1, sia il seguente:

$$(a_{11}, a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n1}).$$

Supponiamo, al contrario, che la T porti le lettere di C_1 in quelle di C_2, queste in quella di C_3, ecc., quelle di C_{r-1} in quelle di C_r, e queste ultime in quelle di C_1, e che sia $r < n$: vedremo che questo è un assurdo. Diciamo infatti $a'_{11}, a'_{12}, \dots a'_{1m}, a'_{21}, \dots, a'_{2m}, \dots, a'_{r1}\, a'_{rm}$ le lettere in cui la T porta rispettivamente $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}, a_{21}, \dots, a_{2m}, a_{r1}, \dots, a_{rm}$. Decomposta la sostituzione

$$\begin{pmatrix} a'_{11}, a'_{12}, \dots, a'_{1m}, a'_{21}, \dots, a'_{2m}, \dots, a'_{r1}, \dots, a'_{rm} \\ a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}, a_{21}, \dots, a_{2m}, \dots, a_{r1}, \dots, a_{rm} \end{pmatrix}$$

in cicli, tutti questi cicli devono contenere lo stesso numero n di lettere (chè tutti i cicli di T hanno n lettere); dev'essere quindi n un divisore di rm, e siccome n è primo con m, dev'essere n un divisore di r, il che è assurdo, essendo $r < n$, e $r \geq 1$. Così la nostra affermazione è dimostrata.

La sostituzione T porterà dunque le lettere di C_1 ad esempio in quelle di C_2, queste in quelle di C_3, ecc., quelle di C_{n-1} in quelle di C_n, e infine le lettere di C_n in quelle di C_1. Ad esempio T porterà a_{11} in a_{21}, a_{21} in a_{32}, ecc., a_{n-1} in a_n, e a_n in a_1, poichè allora il primo ciclo di T deve chiudersi, essendo tutti i cicli di T di n lettere. Così un ciclo di T sarà, poniamo dunque, il seguente

$$(a_{11}, a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n1});$$

e allora gli altri cicli di T saranno

$$(a_{12}, a_{22}, a_{32}, \dots, a_{n2}); (a_{13}, a_{23}, \dots, a_{n3}); \dots; (a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{nm}),$$

poichè si è visto che T deve scambiare tra loro i varî cicli di S.

Adesso ci sarà facile dimostrare che anche il prodotto ST è una sostituzione regolare. Consideriamo infatti quel ciclo di ST che incomincia con a_{11}: la ST porta a_{11} in a_{22}, a_{22} in a_{33}, ecc., e se questo ciclo contiene k lettere, dopo k volte si ritroverà a_{11}. Allora consideriamo quel ciclo di ST che incomincia con a_{12}: la ST porta a_{12} in a_{23}, a_{23} in a_{34}, ecc., e quindi dopo k volte si ritroverà a_{12}, sicchè anche questo ciclo conterrà k lettere. Consideriamo quel ciclo di ST che comincia con a_{21}; la ST porta a_{21} in a_{32}, questa in a_{43}, ecc., talchè pure dopo k volte si ritroverà a_{21}, cioè anche questo ciclo conterrà k lettere. Insomma tutti i cicli di ST contengono uno stesso numero k di lettere. Ma siccome m e n sono primi tra loro, e S e T sono permutabili, il prodotto ST avrà il periodo mn, e quindi ogni ciclo di ST deve avere il periodo mn, vale a dire che ST è costituita da un unico ciclo di mn lettere, e il teorema è così finalmente dimostrato.

Posto ST $=$ C, siccome le sostituzioni S e T sono permutabili col loro prodotto C, S e T saranno due potenze della ciclica C: posto $S = C^r$, e $T = C^s$, sarà $ST = C^{r+s} = C$, onde sarà: $r + s \equiv 1 \pmod{mn}$; e siccome $1 < r < m$, e $1 < s < m$, si ha: $2 < r + s < 2mn$, e quindi $r + s = mn + 1$. Il teorema enunciato può dunque completarsi, dicendo che S *e* T *sono potenze di una medesima sostituzione ciclica* C, *e che la somma dei due esponenti è* $= mn + 1$.

Matematica. — *Una nuova dimostrazione del teorema di Green.* Nota di Mauro Picone, presentata dal Corrisp. G. Fubini.

§ 1. — Lemma: la regola di L'Hospital per le funzioni di più variabili.

1. *Se* $a, b, \ldots, c$ *sono numeri positivi e se le funzioni* $F(x, y, \ldots, z)$, $G(x, y, \ldots, z)$ *sono continue, con le loro derivate prime, nell'insieme* Ω *definito dalle diseguaglianze*:

$$x_0 < x \leq x_0 + a \ , \ y_0 < y \leq y_0 + b \ , \ldots , \ z_0 < z \leq z_0 + c \,,$$

nel quale esse funzioni vengono esclusivamente considerate, se di più è sempre in Ω

$$G(x, y, \ldots, z) \neq 0 \,,$$

$$G_x(x, y, \ldots, z) > 0 \ , \ G_y(x, y, \ldots, z) > 0 \ , \ G_z(x, y, \ldots, z) > 0 \,,$$

mentre

$$F(x_0, y_0, \ldots, z_0) = G(x_0, y_0, \ldots, z_0) = 0 \,,$$

allora dall'esistenza dei limiti

$$\lim_{M=M_0} \frac{F_x(x, y, \ldots, z)}{G_x(x, y, \ldots, z)} \ , \ \lim_{M=M_0} \frac{F_y(x, y, \ldots, z)}{G_y(x, y, \ldots, z)} \ , \ldots , \ \lim_{M=M_0} \frac{F_z(x, y, \ldots, z)}{G_z(x, y, \ldots, z)} \,,$$

ove M e M_0 *designano i punti* $x, y, \ldots, z$; $x_0, y_0, \ldots, z_0$, *e dalla eguaglianza di questi limiti, discende l'esistenza del limite*

$$\lim_{M=M_0} \frac{F(x, y, \ldots, z)}{G(x, y, \ldots, z)}$$

e l'eguaglianza di questo ai precedenti.

Il teorema si dimostra subito. Supposto, invero, $x_0 = y_0 = \cdots = z_0 = 0$, dalla eguaglianza

$$\frac{F(x, y, \ldots, z)}{G(x, y, \ldots, z)} = \frac{\Sigma x F_x(\theta x, \theta y, \ldots, \theta z)}{\Sigma x G_x(\theta x, \theta y, \ldots, \theta z)} \,, \quad 0 < \theta < 1 \,,$$