ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

Posto ST $=$ C, siccome le sostituzioni S e T sono permutabili col loro prodotto C, S e T saranno due potenze della ciclica C: posto $S = C^r$, e $T = C^s$, sarà $ST = C^{r+s} = C$, onde sarà: $r + s \equiv 1 \pmod{mn}$; e siccome $1 < r < m$, e $1 < s < m$, si ha: $2 < r + s < 2mn$, e quindi $r + s = mn + 1$. Il teorema enunciato può dunque completarsi, dicendo che *S e T sono potenze di una medesima sostituzione ciclica C, e che la somma dei due esponenti è* $= mn + 1$.

Matematica. — *Una nuova dimostrazione del teorema di Green.* Nota di Mauro Picone, presentata dal Corrisp. G. Fubini.

§ 1. — Lemma: la regola di L'Hospital per le funzioni di più variabili.

1. *Se* $a, b, \ldots, c$ *sono numeri positivi e se le funzioni* $F(x, y, \ldots, z)$, $G(x, y, \ldots, z)$ *sono continue, con le loro derivate prime, nell'insieme* Ω *definito dalle diseguaglianze*:

$$x_0 < x \leq x_0 + a \ ,\ y_0 < y \leq y_0 + b \ , \ldots ,\ z_0 < z \leq z_0 + c \,,$$

nel quale esse funzioni vengono esclusivamente considerate, se di più è sempre in Ω

$$G(x, y, \ldots, z) \neq 0 \,,$$

$$G_x(x, y, \ldots, z) > 0 \ ,\ G_y(x, y, \ldots, z) > 0 \ ,\ G_z(x, y, \ldots, z) > 0 \,,$$

mentre

$$F(x_0, y_0, \ldots, z_0) = G(x_0, y_0, \ldots, z_0) = 0 \,,$$

allora dall'esistenza dei limiti

$$\lim_{M=M_0} \frac{F_x(x, y, \ldots, z)}{G_x(x, y, \ldots, z)} \,,\ \lim_{M=M_0} \frac{F_y(x, y, \ldots, z)}{G_y(x, y, \ldots, z)} \,, \ldots ,\ \lim_{M=M_0} \frac{F_z(x, y, \ldots, z)}{G_z(x, y, \ldots, z)} \,,$$

ove M *e* M_0 *designano i punti* $x, y, \ldots, z$; $x_0, y_0, \ldots, z_0$, *e dalla eguaglianza di questi limiti, discende l'esistenza del limite*

$$\lim_{M=M_0} \frac{F(x, y, \ldots, z)}{G(x, y, \ldots, z)}$$

e l'eguaglianza di questo ai precedenti.

Il teorema si dimostra subito. Supposto, invero, $x_0 = y_0 = \cdots = z_0 = 0$, dalla eguaglianza

$$\frac{F(x, y, \ldots, z)}{G(x, y, \ldots, z)} = \frac{\Sigma x F_x(\theta x, \theta y, \ldots, \theta z)}{\Sigma x G_x(\theta x, \theta y, \ldots, \theta z)} \,,\quad 0 < \theta < 1 \,,$$

segue che la frazione F/G è compresa fra la più grande e la più piccola delle frazioni

$$\frac{F_x(\theta x\,,\theta y\,,\ldots,\theta z)}{G_x(\theta x\,,\theta y\,,\ldots,\theta z)}\,,\ldots\,\frac{F_z(\theta x\,,\theta y\,,\ldots,\theta z)}{G_z(\theta x\,,\theta y\,,\ldots,\theta z)}\,.$$

§ 2. — Una nuova dimostrazione del teorema di Green.

2. Questo teorema, che afferma le uguaglianze

$$(1)\qquad \iint_{\Omega}\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy=\int_{(\Omega)}Q\,dy\quad;\quad \iint_{\Omega}\frac{\partial P}{\partial y}=-\int_{(\Omega)}P\,dx$$

è dimostrato in tutti i trattati di analisi sotto la condizione restrittiva che il contorno (Ω) del dominio regolare Ω sia incontrato da ogni parallela agli assi coordinati al massimo in un numero *finito* di punti (¹). Come primo esempio di applicazione del teorema di unicità per una funzione additiva di campo di derivata assegnata da me enunciato nella Nota *Sulle funzioni additive di campo*, ultimamente apparsa in questi Rendiconti (²), dò qui, del teorema di Green, una nuova dimostrazione elementare che lascia cadere quella restrizione e lo stabilisce in tutta la generalità desiderabile per le ordinarie questioni di Analisi. Dimostro cioè il teorema:

Se nel dominio chiuso e regolare Ω sono definite le funzioni $P\,,Q$, *continue con le loro derivate* $Q_x\,,P_y$, *sussistono le eguaglianze* (1).

3. Dimostriamo la prima delle (1) e dimostriamola dapprima nella ipotesi che il contorno (Ω) sia privo di punti singolari. Le due funzioni

$$S_1(\tau)=\iint_{\tau}\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy\quad,\quad S_2(\tau)=\int_{(\tau)}Q\,dy\,,$$

sono funzioni additive delle porzioni regolari τ di Ω, di cui la prima ha per derivata, in ogni punto di Ω, la funzione $Q_x(x\,,y)$, basta dunque dimostrare che la funzione $S_2(\tau)$ ha per derivata, nel senso del n. 3 di (N), la stessa funzione.

(¹) Tale condizione viene, in conseguenza di ciò, a figurare quasi sempre nelle analisi dei problemi dei valori al contorno per le equazioni alle derivate parziali, analisi che spesso si fondano appunto sulle formole (1).

Cino Poli nella Nota *Sugli integrali estesi al contorno di un campo qualunque* (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. *49*, pag. 248), mediante una opportuna estensione della definizione di integrale curvilineo, osservò però, fin dal 1913, che il noto teorema di Fubini sugli integrali superficiali [Cfr., per esempio, Ch. J. de la Vallée Poussin, *Cours d'Analyse infinitesimale* (2^me^ édition), t. II, Chap. III] assicura la validità del teorema di Green, nel concetto di Lebesgue di integrale, per campi i cui contorni non devono soddisfare ad alcuna condizione.

(²) Citerò questa Nota con la notazione (N).

Sia P un punto interno di Ω ed in esso concepiamo portata l'origine delle coordinate. Il contorno di un rettangolo r, a lati paralleli agli assi coordinati, al quale il punto P è interno, segnerà sull'asse x due punti di ascisse $-\alpha$ e β, e sull'asse y due punti di ordinate $-\gamma$ e δ. Supposto r tutto interno ad Ω, si ha:

$$\frac{S_2(r)}{r} = \frac{1}{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)} \left\{ \int_{-\gamma}^{\delta} Q(\beta, y)\, dy - \int_{-\gamma}^{\delta} (-\alpha, y)\, dy \right\},$$

e quindi, evidentemente,

$$\lim_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=0} \frac{S_2(r)}{r} = Q_x(0, 0).$$

Sia P un punto del contorno (Ω). Distingueremo due casi.

1° caso. — La tangente in P non è parallela all'asse y. Si possono allora considerare i rettangoloidi r_y relativi al punto P. Sia $-y$ il raggio che penetra nell'interno di Ω e sia

$$y = \varphi(x) \quad , \quad \varphi(0) = 0,$$

l'equazione del pezzo di (Ω) contenuto nella semistriscia che determina r_y, $-\alpha$ e β le ascisse dei lati della semistriscia e $-\gamma$ l'ordinata della base. Si possono supporre α, β, γ già tanto piccoli che tutto l'indicato pezzo di (Ω) sia rappresentato dall'equazione $y = \varphi(x)$, con $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ finite e continue nel tratto $(-\alpha, \beta)$. In questo tratto sarà sempre

$$\varphi(x) \geqq -\gamma.$$

Si ha:

$$S_2(r_y) = \int_{-\gamma}^{\varphi(\beta)} Q(\beta, y)\, dy - \int_{-\alpha}^{\beta} Q[x, \varphi(x)]\, \varphi'(x)\, dx -$$

$$- \int_{-\gamma}^{\varphi(-\alpha)} Q(-\alpha, y)\, dy \equiv F(\alpha, \beta, \gamma),$$

$$r_y = \alpha\gamma + \gamma\beta + \int_{-\alpha}^{\beta} \varphi(x)\, dx \equiv G(\alpha, \beta, \gamma).$$

Occorre studiare il limite

$$\lim_{\alpha,\beta,\gamma=0} \frac{F(\alpha, \beta, \gamma)}{G(\alpha, \beta, \gamma)}.$$

È

$$F(0, 0, 0) = G(0, 0, 0) = 0,$$

$$F_\alpha = \int_{-\gamma}^{\varphi(-\alpha)} Q_x(-\alpha, y)\, dy, \quad F_\beta = \int_{-\gamma}^{\varphi(\beta)} Q_x(\beta, y)\, dy, \quad F_\gamma = Q(\beta, -\gamma) - Q(-\alpha, -\gamma),$$

$$G_\alpha = \gamma + \varphi(-\alpha), \quad G_\beta = \gamma + \varphi(\beta), \quad G_\gamma = \alpha + \beta.$$

Saranno soddisfatte le condizioni per l'applicabilità della regola del § 2, se sarà sempre $\varphi(-\alpha) > -\gamma$, $\varphi(\beta) > -\gamma$, ed avendosi, in tale ipotesi:

$$\lim_{\alpha,\beta,\gamma=0} \frac{F_\alpha}{G_\alpha} = \lim_{\alpha,\beta,\gamma=0} \frac{F_\beta}{G_\beta} = \lim_{\alpha,\beta,\gamma=0} \frac{F_\gamma}{G_\gamma} = Q_x(0\,,0)\,,$$

risulta dimostrato, in tale ipotesi, che

$$\lim \frac{S_2(r_y)}{r_y} = Q_x(0\,,0)\,.$$

Se poi è $\varphi(-\alpha) = -\gamma$, o $\varphi(\beta) = -\gamma$, o $\varphi(-\alpha) = \varphi(\beta) = -\gamma$, considerando che

$$\frac{F\{\alpha\,,\beta\,,-\varphi(-\alpha)\}}{G\{\alpha\,,\beta\,,-\varphi(-\alpha)\}} = \lim_{\gamma=-\varphi(-\alpha)+0} \frac{F(\alpha\,,\beta\,,\gamma)}{G(\alpha\,,\beta\,,\gamma)}\,,$$

$$\frac{F\{\alpha\,,\beta\,,-\varphi(\beta)\}}{G\{\alpha\,,\beta\,,-\varphi(\beta)\}} = \lim_{\gamma=-\varphi(\beta)+0} \frac{F(\alpha\,,\beta\,,\gamma)}{G(\alpha\,,\beta\,,\gamma)}\,,$$

riesce dimostrato in generale quanto si voleva.

2° Caso. — La tangente in P non è parallela all'asse x. Si possono allora considerare i rettangoloidi r_x relativi al punto P. Supposto che sia $+x$ l'asse che penetra nell'interno di Ω, si avrà:

$$S_2(r_x) = \int_{-\gamma}^{\delta} Q(\beta\,,y)\,dy - \int_{-\gamma}^{\delta} Q[\psi(y)\,,y]\,dy \equiv F(\beta\,,\gamma\,,\delta)\,,$$

$$r_x = \beta\gamma + \beta\delta - \int_{-\gamma}^{\delta} \psi(y)\,dy \equiv G(\beta\,,\gamma\,,\delta)\,,$$

e, come per il caso precedente, si stabilirà che

$$\lim \frac{S_2(r_x)}{r_x} = Q_x(0\,,0)\,.$$

4. Dimostrato il teorema di Green nell'ipotesi che (Ω) è privo di punti singolari, lo si stabilisce nel caso generale in cui esso può presentarne un numero finito, colla solita operazione che consiste nel togliere ciascuna cuspide o punto angoloso di (Ω), mediante una curva a punti ordinarî raccordantesi ad (Ω) e interna ad un cerchio di raggio ϱ e di centro nel punto singolare. Si ha così un dominio Ω_ϱ per cui vale il teorema di Green, ed è:

$$\lim_{\varrho=0} \Omega_\varrho = \Omega\,,\quad \lim_{\varrho=0} \int\!\!\int_{\Omega_\varrho} F\,dx\,dy = \int\!\!\int_{\Omega} F\,dx\,dy\,,\quad \lim_{\varrho=0} \int_{(\Omega_\varrho)} F\,dy = \int_{(\Omega)} F\,dy.$$